

انتگرال

کسره‌های گویا

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت دوم)



فرض کنیم، می‌خواهیم $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ را که در آن یک

کسر گویاست، محاسبه کنیم؛ برای این کار ابتدا $\frac{p(x)}{q(x)}$ را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده نوشته و سپس از این کسره‌های ساده انتگرال می‌گیریم. برای نوشتن $\frac{p(x)}{q(x)}$ به کسره‌های ساده از قضایای قبل استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{dx}{x^2-1}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{1}{x^2-1}$ را به صورت مجموع دو کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A = \frac{1}{x+1} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{x-1} \Big|_{x=1} = \frac{-1}{2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

با فرض $C = \frac{\ln|k|}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{k(x-1)}{x+1} \right|$$

مثال: $\int \frac{dx}{x^2+2x^2+x}$ را حساب کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{1}{x^2+2x^2+x}$ را به صورت مجموع چند

کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^2+2x^2+x} = \frac{1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+4x} dx &= \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{x-4}{4(x^2+4)} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \frac{1}{4} \text{Arc tan } \frac{x}{2} + C \\ \text{مثال: } \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \text{ را محاسبه کنید.}\end{aligned}$$

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ به صورت مجموع چند کسر ساده می نویسیم :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x+3}$$

$$A = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \Big|_{x=0} = \frac{1}{6},$$

$$B = \frac{1}{x(x+2)(x+3)} \Big|_{x=-1} = \frac{-1}{2},$$

$$C = \frac{1}{x(x+1)(x+3)} \Big|_{x=-2} = \frac{1}{2},$$

$$D = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \Big|_{x=-3} = \frac{-1}{6}$$

بنابراین :

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} +$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + C$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$A = \frac{1}{(x+1)^2} \Big|_{x=0} = 1, \quad B = \frac{1}{x} \Big|_{x=-1} = -1$$

برای محاسبه C کافی است، برابری را به ازای $x=1$ به یک معادله یک مجهولی تبدیل کنیم :

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{C}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = -1$$

بنابراین :

$$\int \frac{dx}{x^2+2x^2+x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + C$$

با فرض $C = \ln|k|$ ، خواهیم داشت :

$$\int \frac{dx}{x^2+2x^2+x} = \ln \left| \frac{kx}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1}$$

مثال: $\int \frac{x+1}{x^2+4x} dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{x+1}{x^2+4x}$ را به صورت مجموع چند

کسر ساده می نویسیم :

$$\frac{x+1}{x^2+4x} = \frac{x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{kx+s}{x^2+4}$$

$$= \frac{x+1}{x(x^2+4)} = \frac{(A+k)x^2+sx+4A}{x(x^2+4)}$$

$$x+1 \equiv (A+k)x^2+sx+4A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+k=0 \\ s=1 \\ 4A=1 \end{cases} \Rightarrow s=1, A=\frac{1}{4}, k=-\frac{1}{4}$$