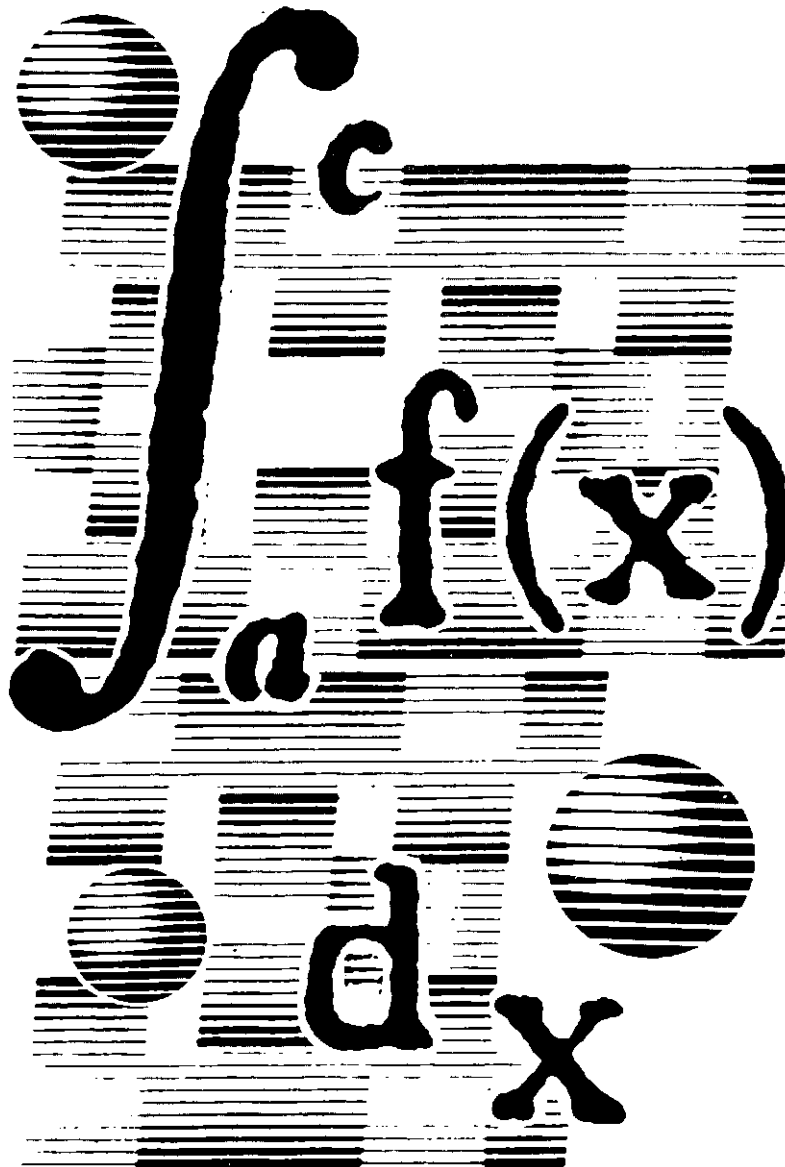


انتگرال کسرهاى گویا

• سيد محمدرضا هاشمى موسوى

(قسمت اول)



تجزیه کسرهاى گویا

در این مقاله، ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان هر کسر گویا را به صورت مجموع چند کسر ساده نوشت. یادآور می‌شویم کسرهایی را گویا می‌نامیم که صورت و مخرج آنها یک عبارت چند جمله‌ای به صورت $p(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد؛ درحالتی که صورت و مخرج کسر، کسرهایی گویا باشند، می‌توان با ضرب صورت و مخرج در کوچکترین مضرب مشترک (م.م.م) مخرج‌ها به یک کسر گویا رسید. به طور مثال، کسرهایی مانند:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}, \frac{\cos^2 x + \cos x}{3 \sin x + x}, \frac{e^x + x}{x^2 + \ln x}, \frac{\sqrt{x} + x^2}{x^2 + x + 1}$$

و ... را کسر گویا نمی‌نامیم. ولی کسرهایی نظیر:

$$\frac{x^5 + x - 1}{x^5 + x^2}, \frac{x^2 + x}{x^3 - 3x + 1}$$

$$\frac{x}{x^3 - x + 1}, \frac{x+1}{x^2 + 4}$$

همچنین کسرهایی نظیر اینها را می‌توان به کسر گویا تحويل داد:

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x-1} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

$$\frac{\frac{x}{x^2+1}}{\frac{x^3-x+1}{x^2+4}} = \frac{(x^2+4)(x^2+1) \frac{x}{x^2+1}}{(x^2+4)(x^2+1) \frac{x^3-x+1}{x^2+4}} =$$

$$= \frac{x^3+4x}{x^5-x^4+x^2+x^3-x+1}$$

تعريف: کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامیم اگر $p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله‌ای بر حسب x باشند. مانند:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'}$$

هر کسر گویا را می‌توان به صورت مجموع کسرهایی ساده‌تر

$$A = \frac{2}{x+1} \Big|_{x=1} = \frac{2}{1+1} = 1, \quad B = \frac{2}{x-1} \Big|_{x=-1} = \frac{2}{-1-1} = -1$$

درستی مطلب فوق را به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$F(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad (1)$$

برای محاسبه A دو طرف برابری (1) را در مخرج کسر $\frac{A}{x-1}$ یعنی $x-1$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-1)F(x) = (x-1) \frac{2}{x^2-1} = (x-1) \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \right]$$

$$(x-1)F(x) = \frac{2}{x+1} = A + \frac{(x-1)B}{x+1} \quad (2)$$

حال دو طرف برابری (2) را به ازای $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$(x-1)F(x) \Big|_{x=1} = \frac{2}{x+1} \Big|_{x=1} = \left(A + \frac{(x-1)B}{x+1} \right) \Big|_{x=1}$$

$$\Rightarrow (x-1)F(x) \Big|_{x=1}$$

$$= \frac{2}{1+1} = A + \frac{(0)B}{1+1} \Rightarrow A = (x-1)F(x) \Big|_{x=1} = 1$$

به همین ترتیب برای محاسبه B دو طرف برابری (1) را در مخرج کسر $\frac{B}{x+1}$ یعنی $x+1$ ضرب می‌کنیم:

$$(x+1)F(x) = (x+1) \frac{2}{x^2-1} = (x+1) \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \right]$$

$$(x+1)F(x) = \frac{2}{x-1} = \frac{(x+1)A}{x-1} + B \quad (3)$$

حال، دو طرف برابری (3) را به ازای $x=-1$ محاسبه می‌کنیم:

$$(x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{2}{x-1} \Big|_{x=-1} = \left(\frac{(x+1)A}{x-1} + B \right) \Big|_{x=-1}$$

$$\Rightarrow (x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{2}{-1-1} = \frac{(0)A}{-1-1} + B$$

نوشت. به این ترتیب محاسبه انتگرال یک کسر گویا منجر به محاسبه انتگرال کسرهای گویای ساده‌تری خواهد شد. به طور مثال به برابری زیر توجه کنید:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

در این جا این سؤال را مطرح می‌کنیم که اگر $\frac{2}{x^2-1}$ داده شده باشد، چگونه می‌توان آن را به صورت مجموع دو کسر نوشت؟

برای نوشتن $\frac{2}{x^2-1}$ به مجموع دو کسر، ابتدا مخرج کسر را به عاملهای درجه اول تجزیه می‌کنیم و سپس پارامترهای A و B را چنان تعیین می‌کنیم که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

برای تعیین A و B می‌توان به دو روش عمل کرد.

روش اول:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} \end{aligned}$$

چون مخرجهای دو کسر برابرند، باید صورتهای آنها نیز متحد باشند:

$$(A+B)x + A - B \equiv 2$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1$$

بنابراین:

روش دوم:

عبارت $\frac{2}{x^2-1}$ را به $F(x)$ نشان می‌دهیم. و سپس ریشه‌های مخرج کسر مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. در این صورت، پارامترها از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$F(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A = (x-1)F(x) \Big|_{x=1} \quad B = (x+1)F(x) \Big|_{x=-1}$$

توجه: لازم به توضیح است که حل این مسأله به روش اول (به کمک اتحاد) به حل یک دستگاه پنج معادله پنج مجهولی (A, B, C, D, E) منجر می شود که بسیار وقت گیر و از نظر محاسبه بسیار پرحجم است. به همین دلیل برای کاهش در وقت و عملیات روش دوم توصیه می شود.

تذکر: در توابع گویا اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد، با تقسیم صورت بر مخرج به یک چند جمله ای و کسر دیگری خواهیم رسید که درجه صورت این کسر از مخرج آن کمتر خواهد بود. در توابع گویا به طور عمومی می توان مخرج آنها را به حاصل ضرب چند عبارت درجه یک یا دو یا توانهایی از آنها تحویل کرد.

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده و یک چند جمله ای بنویسید:

$$\frac{5x^2+2}{x^2-1}$$

حل: چون درجه صورت بیشتر از درجه مخرج است، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، خارج قسمت و باقی مانده را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{5x^2+x^2+1}{x^2-1} = 5x+1 + \frac{5x+2}{x^2-1}$$

حال، عبارت $\frac{5x+2}{x^2-1}$ را به $F(x)$ نمایش می دهیم؛ و چون درجه صورت آن کمتر از درجه مخرج و تحویل ناپذیر است، $F(x)$ را به مجموع دو کسر ساده می نویسیم:

$$F(x) = \frac{5x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A = (x-1)F(x) \Big|_{x=1} = \frac{5x+2}{x+1} \Big|_{x=1} = \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{7}{2}}$$

$$B = (x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{5x+2}{x-1} \Big|_{x=-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{3}{2}}$$

$$\frac{5x^2+x^2+1}{x^2-1} = 5x+1 + \frac{7}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}$$

بنابراین همان طور که در این مثال دیدیم، اگر کسر گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ را در

نظر بگیریم. ($p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله ای پرحسب x هستند) و درجه $p(x)$ بیش از درجه $q(x)$ باشد، آنگاه

$$\Rightarrow B = (x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = -1$$

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده بنویسید:

$$F(x) = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

حل: فرض می کنیم $F(x)$ به صورت مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$F(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2}$$

حال، پارامترهای A, B, C, D, E را از رابطه های زیر محاسبه می کنیم:

$$A = xF(x) \Big|_{x=0} = \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)} \Big|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{(-1)(-4)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

$$B = (x-1)F(x) \Big|_{x=1} = \frac{x^2+1}{x(x+1)(x^2-4)} \Big|_{x=1}$$

$$= \frac{2}{(2)(-3)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-1}{3}}$$

$$C = (x+1)F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x^2-4)} \Big|_{x=-1}$$

$$= \frac{2}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{C = \frac{-1}{3}}$$

$$D = (x-2)F(x) \Big|_{x=2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x+2)} \Big|_{x=2}$$

$$= \frac{17}{(2)(3)(4)} = \frac{17}{24} \Rightarrow \boxed{D = \frac{17}{24}}$$

$$E = (x+2)F(x) \Big|_{x=-2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x-2)} \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{17}{(-2)(3)(-4)} = \frac{17}{24} \Rightarrow \boxed{E = \frac{17}{24}}$$

$$F(x) = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

بنابراین:

$$= \frac{1}{4x} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{17}{24(x-2)} + \frac{17}{24(x+2)}$$

برهان: فقط به ذکر یک راهنمایی برای اثبات اکتفا کرده و

تکمیل اثبات را به عهده خودتان واگذار می‌کنیم کسر $\frac{F(x)}{g(x)}$ را

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^n t(x)} = \frac{At(x) + F(x) - At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{F(x) - At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$

رابطه بالا برای هر $A \in \mathbb{R}$ برقرار است، در اینجا A را

چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای $F(x) - At(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد.

نتیجه: اگر قضیه بالا را n مرتبه برای کسر

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1} t(x)}$$

نیز به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)} + \frac{F_n(x)}{t(x)} \quad (2)$$

در برابری (۲) کسر $\frac{F_n(x)}{t(x)}$ کسری گویا و تحویل‌ناپذیر

است. اگر $t(x)$ ریشه‌های دیگری غیر از a داشته باشد، قضیه اخیر را برای این ریشه‌ها نیز می‌توان به کار برد.

مثال: کسر $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ را به مجموع چند کسر ساده

بنویسید.

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر

به مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{x+2}$$

$$A_1 = \frac{x+1}{x+2} \Big|_{x=1} = \frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{x+1}{(x-1)^2} \Big|_{x=-2} = \frac{-1}{9}$$

برای محاسبه A_3 کافی است عددی را از مجموعه

$\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ برای x اختیار کنیم و در برابری زیر قرار دهیم:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)} \quad (1)$$

چندجمله‌ایهای $s(x)$ و $r(x)$ وجود دارند، به طوری که داشته باشیم:

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ کمتر از درجه $q(x)$ است.

بنابراین:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

چون $s(x)$ یک چند جمله‌ای است، محاسبه $\int s(x) dx$ بسیار

آسان است، پس محاسبه $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ به محاسبه $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$

منجر می‌شود که در آن درجه $r(x)$ از درجه $q(x)$ کوچکتر است. بنابراین کافی است فقط حالتی را در نظر بگیریم که درجه $p(x)$ کمتر از درجه $q(x)$ باشد.

پس، قرارداد می‌کنیم، بعد از این کسرهایی را در نظر بگیریم که درجه صورت آنها کمتر از درجه مخرج، و علاوه بر آن، کسر تحویل‌ناپذیر باشد (یعنی صورت و مخرج کسر ریشه یا ریشه‌های مشترک نداشته باشند).

تعریف: کسرهایی گویا به صورتهای زیر را، که در آنها a ، B ، p ، q عددهای حقیقی ثابت و $n \in \mathbb{N}$ باشد، کسرهایی ساده می‌نامیم:

$$1) \frac{A}{(x-a)^n}, \quad 2) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q < 0$$

در کسر ساده نوع دوم، فرض می‌شود که مبین مخرج (p^2-4q) منفی باشد؛ زیرا در غیر این صورت مخرج، حاصل ضرب دو عبارت خطی می‌شود.

قضیه: اگر a یک ریشه حقیقی مرتبه n ام مخرج کسر گویای $\frac{F(x)}{g(x)}$ باشد، یعنی،

$$g(x) = (x-a)^n t(x)$$

و $t(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نباشد، یا $t(a) \neq 0$ ، آنگاه کسر

گویای $\frac{F(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت مجموع دو کسر ساده زیر

نوشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1} t(x)} \quad (1)$$

در برابری (۱)، $A \neq 0$ عددی ثابت است و درجه $F_1(x)$ از درجه $(x-a)^{n-1} t(x)$ کوچکتر است.

ضرایب توانهای برابر x را در صورتها برابر هم قرار داد و از معادله‌های به دست آمده، ضرایب فوق را حساب کرد. روش دیگر برای محاسبه این ضرایب، آن است که به x مقادیر دلخواه و مناسب بدهیم، تا معادله‌هایی بین ضرایب بالا به دست آیند و از حل این معادله‌ها، ضرایب را حساب کنیم.

مثال: کسر زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

$$N(x) = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{-3x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر به مجموع چند کسر ساده به صورت زیر نوشته شود:

$$N(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{k_1x+s_1}{(x^2+1)^2} + \frac{k_2x+s_2}{x^2+1}$$

$$A_1 = (x-1)^2 N(x) \Big|_{x=1} = \frac{-3x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=1} = 1$$

برای محاسبه ضریبهای دیگر، می‌توان از روشهایی که بیان شد استفاده کرد و به نتایج زیر رسید:

$$A_1 = 1, A_2 = -2, K_1 = 1, K_2 = -1, S_1 = S_2 = 0$$

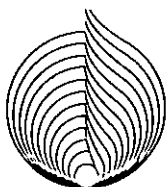
بنابراین، کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

تمرین: کسر گویای $\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2(x+1)^2}$ را

به صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید. راهنمایی: از قضایای پیش استفاده کنید.

◇ ادامه مقاله در شماره آینده



برابری (۱) به ازای $x=0$ ، به معادله یک مجهولی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{(-1)^2(2)} = \frac{2}{3(-1)^2} + \frac{A_2}{(-1)} - \frac{1}{9(2)} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)}$$

نکته مهم: اگر در کسر گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ داشته باشیم:

$$G(x) = (x^2 + px + q)^m T(x)$$

و $T(x)$ بر $x^2 + px + q$ بخش پذیر نباشد.

آنگاه کسر گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ به مجموع دو کسر ساده و گویای زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{kx+s}{(x^2+px+q)^m} + \frac{u(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}T(x)}$$

در این رابطه، $T(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن از درجه چند جمله‌ای $(x^2+px+q)^{m-1}T(x)$ کمتر است، و x^2+px+q ریشه حقیقی ندارد ($p^2-4q < 0$).

از اثبات این قضیه صرف نظر می‌شود.

نتیجه: اگر نکته و قضیه قبل را برای کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ با

فرض:

$$f(x) = (x-a)^n \dots (x^2+px+q)^m$$

به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{x-a} + \dots +$$

$$\frac{k_1x+s_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{k_2x+s_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots +$$

$$\frac{k_mx+s_m}{x^2+px+q}$$

در این برابری ضرایب ثابت A_i , k_i , s_i و ... را چنان باید تعیین کنیم که برابری به یک اتحاد تبدیل شود. برای این منظور، می‌توان پس از مخرج مشترک گرفتن بین کسرها،