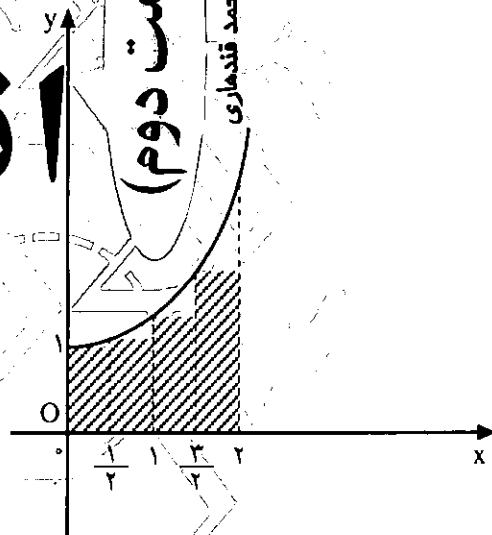


انتگرال معین

قسمت دوم

احمد قندماری



اشاره

در شماره‌ی قبل اندازه‌ی تقریبی نقصانی و اضافی سطح زیر منحنی را بیان کردیم و شرح دادیم که اندازه‌ی تقریب نقصانی سطح زیر منحنی را «پایین ریمان»، و اندازه‌ی تقریبی اضافی سطح زیر منحنی را «بالا ریمان» گویند. مجموع ریمان‌ها در حالت کلی نیز بیان شد. در این شماره، به تعریف انتگرال معین، و قضایا و ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

تابع f را بر بازه‌ی $[a, b]$ ، انتگرال پذیر گویند که اگر این بازه را به n زیر بازه‌ی مساوی افراز کنیم، داشته باشیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

طول x_i برابر Δx یا $\frac{b-a}{n}$ است، پس:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f\left(\frac{yi}{n}\right)$$

ابتدا $\sum_{i=1}^n f\left(\frac{yi}{n}\right)$ را محاسبه می‌کنیم، در ضمن:

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{yi}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{yi^2}{n^2} + 2\right) = \sum_{i=1}^n \frac{yi^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(l_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(c_i) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال ۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 2$ ، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا حد مجموع پایین ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x) dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه‌ی $[0, 2]$ صعودی اکید است و $\Delta x = \frac{2}{n}$. چون تابع f صعودی است، راحت‌تر است، مسئله را از راه حد مجموع بالا ریمان حل کنیم.

$$\Delta x = \frac{2}{n} \quad \text{روش دوم: محاسبه ی } \int_0^2 f(x) dx$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

به خط اول حل روش اول توجه فرمایید. به همان رابطه رسیدیم، پس جواب همان $\frac{4}{3}$ است.

قضیه ی بنیادی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع f در بازه ی I شامل a پیوسته باشد و F با دامنه ی I با ضابطه ی $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، آن گاه F روی I مشتق پذیر است و برای هر $x \in I$ داریم: $F'(x) = f(x)$.

قضیه ی بنیادی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f در بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه ای باشد که برای هر x در بازه ی $[a, b]$ داشته باشیم: $g'(x) = f(x)$ ، آن گاه $\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$.

نکته ی ۱. اگر f تابعی پیوسته و فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

نکته ی ۲. اگر f تابعی پیوسته و زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی مقدار A :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x| \sin x + 1}{1+x^2} dx$$

حل:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x| \sin x + 1}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x| \sin x}{1+x^2} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

تابع با ضابطه ی $g(x) = \frac{|x| \sin x}{1+x^2}$ ، تابعی فرد است؛ پس:

$$A = 0 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx = (\text{Arc tan } x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n}{n}$$

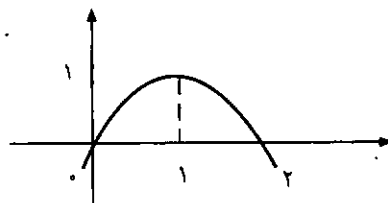
$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n} + \frac{2n}{n} = \frac{4n^2 + 6n + 2}{3n}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \times \frac{4n^2 + 6n + 2}{3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{3n^2} = \frac{4}{3} \quad \text{واحد مربع}$$

مثال ۲. در تابع با ضابطه ی $f(x) = 2x - x^2$ ، به کمک حد مجموع بالا ریمان یا پایین ریمان، حاصل $\int_0^2 f(x) dx$ را بیابید.

حل: تابع f در بازه ی $[0, 1]$ ، صعودی اکید، در بازه ی $[1, 2]$ نزولی اکید، و $x=1$ معادله ی محور تقارن آن است.



می توان مسئله را در بازه ی $[0, 1]$ حل کرد و سپس آن را در ۲ ضرب نمود. یا بدون توجه به مطالب بالا، مسئله را مستقیماً حل کرد.

$$\Delta x = \frac{1}{n} \quad \text{روش اول: محاسبه ی } \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n + 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

با شرط این که f و g انتگرال پذیر باشند:

$$-1 \leq -\cos x \Rightarrow \int_{-1}^x (-1) dx \leq \int_{-1}^x (-\cos x) dx$$

$$\Rightarrow -x \leq -\sin x \Rightarrow \int_{-1}^x -x dx \leq \int_{-1}^x -\sin x dx$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{x^2}{2}\right)^x \leq (\cos x)^x \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Rightarrow \int_{-1}^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx \leq \int_{-1}^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^x \leq (\sin x)^x \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

توجه: توابع با ضابطه های

$$f_1(x) = -x, \quad g_1(x) = \cos x, \quad f_1(x) = -1$$

$$g_2(x) = \cos x, \quad f_2(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad g_2(x) = -\sin x$$

$$g_3(x) = \cos x, \quad f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \text{همگی انتگرال پذیرند.}$$

قضیه ۳: اگر تابعی در یک بازه ی بسته، تعداد متناهی نقطه ناپوستگی داشته باشد و تابع در آن نقاط دارای حد چپ و حد راست باشد، باز هم تابع در آن بازه انتگرال پذیر است.
مثال:

$$\int_{-1}^1 [x] dx = \int_{-1}^0 [x] dx + \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^3 [x] dx + \int_3^4 [x] dx$$

و

$$\int_{-1}^1 [2x] dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} [2x] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [2x] dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} [2x] dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} [2x] dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} [2x] dx$$

و

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{x}{2}\right] dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{2}\right] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x}{2}\right] dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x}{2}\right] dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left[\frac{x}{2}\right] dx$$

قضیه ۴: اگر تابع های f و g تابع هایی کران دار و در بازه ی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند، چنانچه جز در تعداد متناهی نقطه از بازه ی $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، آن گاه

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

$$= \text{Arc tan } \frac{\pi}{4} - \text{Arc tan } \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ویژگی های انتگرال معین

$$۱) \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$۲) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$۳) \int_a^b k dx = k(b-a) \quad k \neq 0$$

$$۴) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \neq 0$$

$$۵) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

لزومی ندارد c بین a و b باشد.

مثال: اگر تابع f انتگرال پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\int_0^5 f(x) dx = 9, \quad \int_1^5 f(x) dx = 9, \quad \int_1^5 f(x) dx = -12$$

بیاید.

حل:

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$12 = 9 + \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 3$$

قضیه ۱:

$$۶) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

قضیه ۲: اگر دو تابع f و g در بازه ی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند و داشته باشیم: $f(x) \leq g(x)$ ، آن گاه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

تمرین: به کمک قضیه ۲ ثابت کنید:

برای هر x متعلق به بازه ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ داریم:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

حل: داریم:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c-1} \int_1^c \frac{2}{x^2} dx = \frac{1}{c-1} \left(-\frac{2}{x} \right) \Big|_1^c = \frac{-1}{c-1} \left(\frac{2}{c} - 2 \right); c \neq 1$$

$$= \frac{-1}{c-1} \left(\frac{2-2c}{c} \right) = \frac{2(c-1)}{c(c-1)} = \frac{2}{c} = 1 \Rightarrow c = 2$$

قضیه ۶. (قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)
اگر f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه عدد حقیقی c ،
 $a < c < b$ وجود دارد که:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

مثال: عدد c قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها را،

برای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos^2 x$ در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

حل:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \cos^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

چند رابطه مهم

همواره داریم:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad (\text{الف})$$

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = g'(x) \cdot f(g(x)) \quad (\text{ب})$$

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = g'(x) \cdot f(g(x)) - h'(x) \cdot f(h(x)) \quad (\text{ج})$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{t} dt}{x^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: می‌دانیم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = -1$ در هر بازه‌ی بسته‌ای انتگرال‌پذیرند و داریم:

$$\int_a^b ([x] + [-x]) dx = \int_a^b (-1) dx$$

قضیه ۵. اگر m و M به ترتیب کران پایین و کران بالای تابع پیوسته f در بازه‌ی $[a, b]$ باشد، داریم:

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$m(b-a)$ را کران پایین انتگرال، $M(b-a)$ را کران بالای انتگرال، و

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

مقدار $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ را مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ گویند.
مثال ۱. ثابت کنید:

$$\frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{1}{x^2 + 2} dx \leq \frac{1}{2}$$

حل:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2, 5]$$

$$f(2) = \frac{1}{6} = M \quad f(5) = \frac{1}{27} = m$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\frac{1}{27}(5-2) \leq \int_2^5 f(x) dx \leq \frac{1}{6}(5-2) \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \int_2^5 \frac{1}{x^2 + 2} dx \leq \frac{1}{2}$$

مثال ۲. اگر مقدار متوسط تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2}{x^2}$ در بازه‌ی $[1, c]$ عدد (۱) باشد، c را بیابید.

حل:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{t} dt}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3} \sin x}{1 \sqrt[3]{x^3}} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{1 \sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{1 \sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{1 \sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{4}$$

محاسبه‌ی بعضی از حدها به کمک انتگرال

فرض می‌کنیم f در بازه $[0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. اگر این بازه را به n قسمت مساوی افراز کنیم، طول هر بازه $\Delta x = \frac{1}{n}$ خواهد شد.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^n f(c_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه‌ی:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{n} \right)$$

حل:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \pi \int_0^1 \cos \frac{\pi}{n} x dx = \left(\sin \frac{\pi}{n} x \right)_0^1 = \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) - 0 = \sin \frac{\pi}{n}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه‌ی حد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{4+n^2}} + \frac{3}{\sqrt{9+n^2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$$

حل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} + \frac{2}{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n^2})}} + \frac{3}{\sqrt{n^2(1+\frac{9}{n^2})}} + \dots \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} + \frac{2}{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} + \frac{3}{n\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}} + \dots \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left(\sqrt{1+x^2} \right)_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

تقریب اندیشه

حسین نامی ساعی

میمون‌های بازی‌گوش

میمون‌ها در دو دسته با هم بازی می‌کردند. مربع یک هشتم آن‌ها با شادی در بیشه جست‌وخیز می‌کردند و دوازده میمون دیگر هم با خوشحالی به آرامی هوا را برهم می‌زدند. شما بگویید چند میمون در آن بیشه بودند؟

جل: اگر تعداد کل میمون‌ها x فرض شود، در این صورت:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x \quad \text{و از این جا:}$$

$$\frac{x^2 + 768}{64} = x$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$(x-16)(x-48) = 0$$

$$x_2 = 48, \quad x_1 = 16$$

بنابراین: مسئله دارای دو جواب مثبت است: در هر دو دسته می‌تواند ۴۸ یا ۱۶ میمون باشد. هر دو جواب، معادله را کاملاً برقرار می‌کند.

جواب معمای فکری و منطقی

جواب ۱: بهترین کلف باز است و بقیه به ترتیب عبارت‌اند از

S, B, C

جواب ۲: C و H در مقابل A و M بازی می‌کردند.

بزرگ‌ترین است. و بقیه به ترتیب سن عبارت‌اند از A, M, H