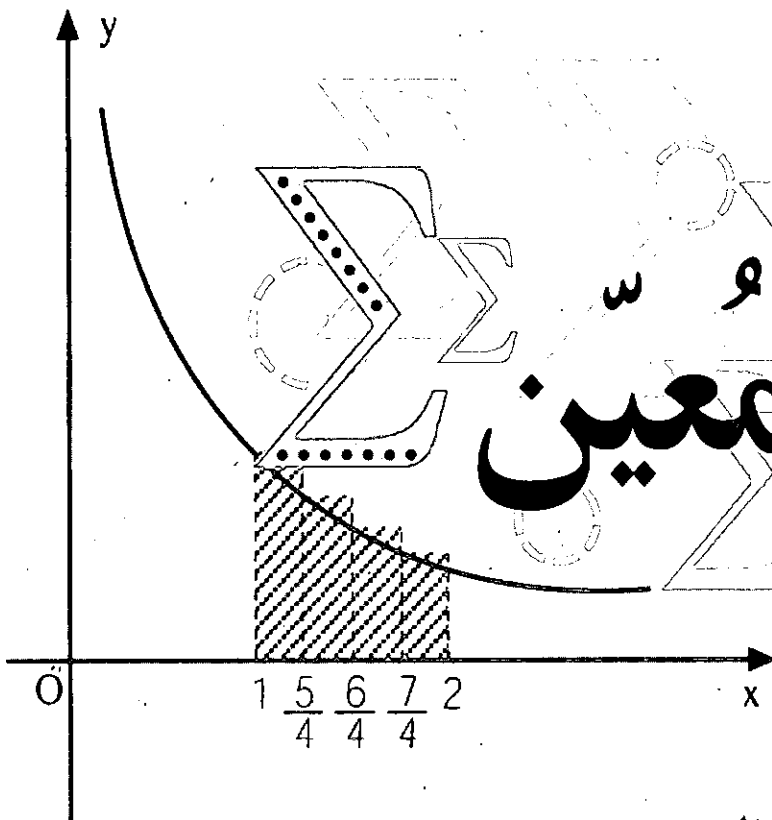


انتگرال معین

(قسمت اول)



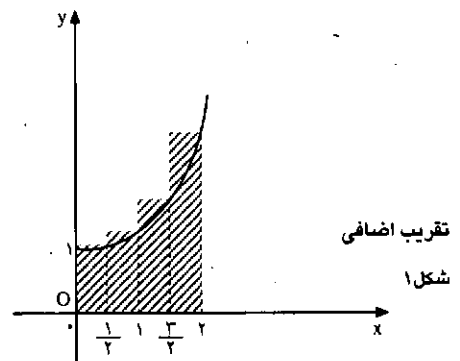
فرض کنید، می‌خواهیم اندازه‌ی مساحت زیر منحنی به معادله‌ی $f(x) = x^2 + 1$ و محور x ‌ها را از خط $x = 0$ تا خط $x = 2$ با تقریب محاسبه کنیم.

اندازه‌ی مساحت مورد نظر را A می‌نامیم. برای این کار، سطح زیر منحنی را به مستطیل‌های محیطی و محاطی با عرض‌های مساوی، مانند شکل‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کنیم.

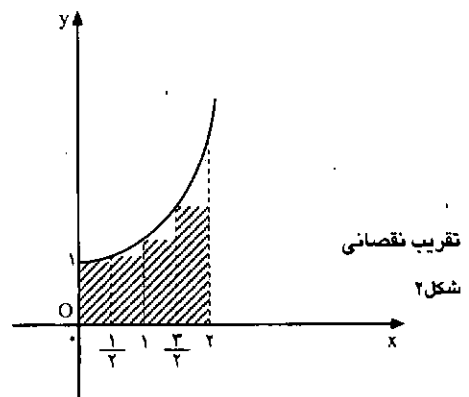
به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، بازه‌ی $[0, 2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

در شکل ۱، مستطیل‌ها محیطی و در شکل ۲ مستطیل‌ها محاطی اند و عرض هر مستطیل $\frac{1}{4}$ است. در شکل ۱، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی، از مساحت سطح زیر منحنی بیشتر است (تقریب اضافی) و در شکل ۲، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی از مساحت سطح زیر منحنی کمتر است (تقریب نقصانی).

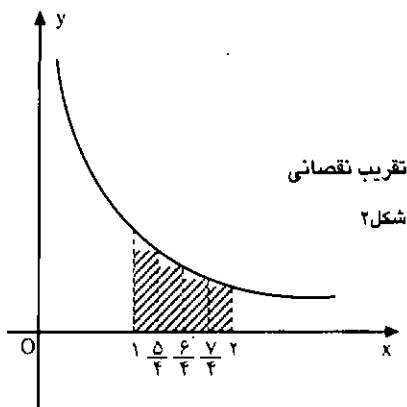
تذکر: مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی را بالاریمان $(U_n f)$ و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی را پایین ریمان $(L_n f)$ می‌گوییم. در قسمت‌های بعد، در این باره بحث مفصلی خواهیم داشت. در محاسبه‌ی بالاریمان (تقریب اضافی) طول هر مستطیل در هر بازه برابر ماکزیمم مطلق تابع و در محاسبه‌ی پایین ریمان (تقریب نقصانی)، طول هر مستطیل در هر بازه برابر می‌نیمم مطلق تابع است. مثلاً در بازه‌ی $[\frac{1}{4}, 1]$ با توجه به شکل، ماکزیمم مطلق تابع $f(1)$ و می‌نیمم مطلق تابع $f(\frac{1}{4})$ است. حال به ادامه‌ی حل



تقریب اضافی
شکل ۱



تقریب نقصانی
شکل ۲



تقریب نقصانی
شکل ۲

$$\text{عرض هر مستطیل} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$U_n f = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(2) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4} + 5 \right) = 5/75 \text{ واحد مربع}$$

$$L_n f = \frac{1}{4} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4} \right) = 3/75 \text{ واحد مربع}$$

بنابراین:

$$3/75 < A = \text{مساحت سطح زیر منحنی} < 5/75$$

چنانچه بازه‌ی $[0, 2]$ را به جای چهار قسمت مساوی، به هشت قسمت مساوی تقسیم و مانند محاسبات بالا عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$U_n f = 5/1875 \text{ اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها}$$

$$L_n f = 4/1875 \text{ اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها}$$

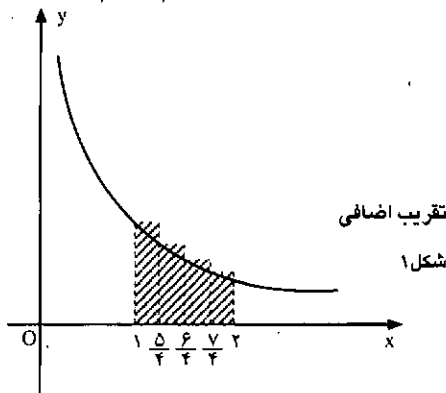
$$4/1875 < A < 5/1875 \text{ بنابراین:}$$

اگر بازه‌ی $[0, 2]$ را به جای هشت قسمت مساوی به هشتاد قسمت مساوی یا به هشتصد قسمت مساوی تقسیم کنیم، آن‌گاه مقادیر عددی تقریب اضافی مساحت‌ها و تقریب نقصانی مساحت‌ها خیلی به هم نزدیک خواهد شد. چنانچه بازه‌ی $[0, 2]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، سپس n را به سمت ∞ میل دهیم، آن‌گاه حد مجموع تقریب نقصانی مساحت‌ها برابر حد مجموع تقریب اضافی مساحت‌ها و برابر سطح زیر منحنی خواهد شد.

مثال ۱. اندازه‌ی سطح زیر منحنی به معادله‌ی $f(x) = \frac{1}{x}$

و محور x ‌ها را از خط $x=1$ تا خط $x=2$ با تقریب اضافی و تقریب نقصانی برای $n=4$ بیابید.

$$\text{حل:} \quad \text{عرض هر مستطیل} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$



تقریب اضافی
شکل ۱

$$U_n f = \frac{1}{4} \left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right)$$

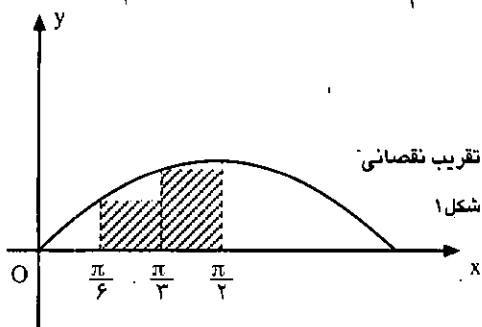
$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \right) = 0/76 \text{ واحد مربع}$$

$$L_n f = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) \right)$$

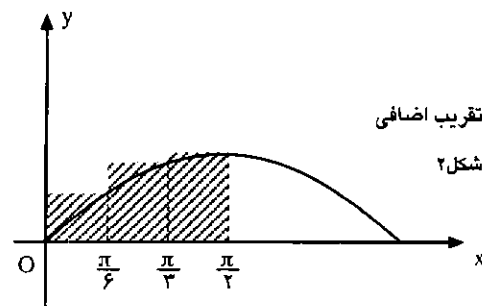
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) = 0/63 \text{ واحد مربع}$$

پس: $0/76 < A = \text{اندازه‌ی سطح زیر منحنی} < 0/63$
مثال ۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin x$ ، مجموع اندازه‌های بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی $[0, \pi]$ برای $n=6$ بیابید.

حل: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin x$ در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{4}]$ صعودی اکید و نامنفی است، بنابراین مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{4}]$ محاسبه و دو برابر می‌کنیم.



تقریب نقصانی
شکل ۱



تقریب اضافی
شکل ۲

$$= \frac{1}{4} (0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/24 \text{ واحد مربع}$$

$$U_n f = 2 \times \Delta x \left(f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right)$$

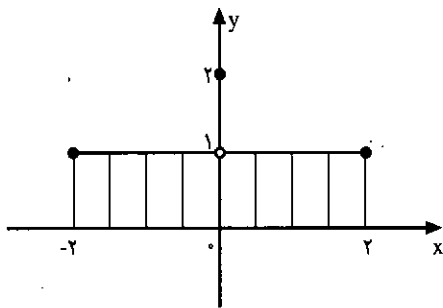
$$= 2 \left(\frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 0/97 + 0/87 + 0/66) = 1/74 \text{ واحد مربع}$$

مثال ۴. تابع با ضابطه ی. اگر $x = 0$ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } x = 0 \\ 1 & \text{اگر } x \neq 0 \end{cases}$ مفروض

است. مجموع بالاریمان و پایین ریمان این تابع در بازه ی $[-2, 2]$ را تعیین کنید.

الف) برای $n=8$ ب) برای $n=9$ ج) برای $n=n$ حل:



$$L_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{1}{4} (8) = 2 \text{ واحد مربع}$$

$$U_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{4} (6 + 4) = 5 \text{ واحد مربع}$$

توجه فرمایید، در دو مستطیلی که محور y ها یک ضلع آن هاست، ماکزیمم مطلق تابع در هریک برابر ۲ است.

$$\Delta x = \frac{2 - (-2)}{9} = \frac{4}{9} \text{ عرض هر مستطیل } n=9$$

$$L_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{4}{9} (9) = 4 \text{ واحد مربع}$$

$$L_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1) = \frac{4}{9} (10) = \frac{40}{9} \text{ واحد مربع}$$

$$\Delta x = \frac{4}{n} \text{ (ج) } n=n \text{ اگر } n \text{ فرد باشد:}$$

$$L_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{4}{n} (n) = 4 \text{ واحد مربع}$$

$$\Delta x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ عرض هر مستطیل}$$

$$U_n f = 2 \times \Delta x \left(f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{(3 + \sqrt{3})\pi}{6}$$

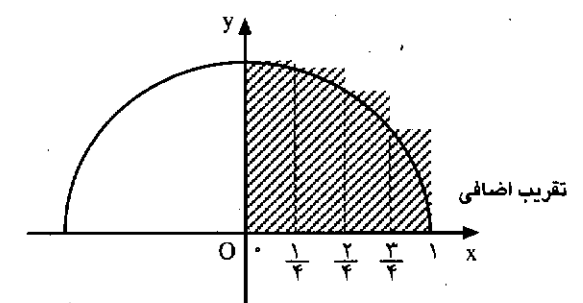
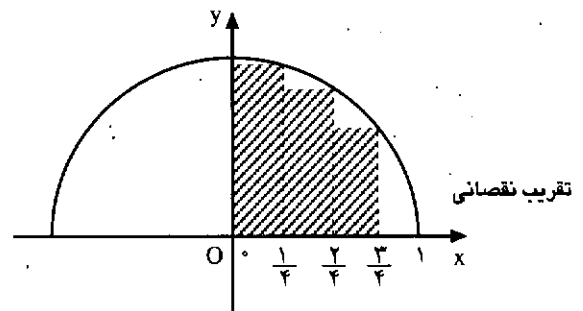
$$L_n f = 2 \times \Delta x \left(f(0) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{6} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{(1 + \sqrt{3})\pi}{6}$$

مثال ۳. در تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، مجموع بالاریمان و پایین ریمان را در بازه ی $[-1, 1]$ برای $n=8$ بیابید. حل: نمودار این تابع یک نیم دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است.

مجموع بالاریمان، پایین ریمان را در بازه ی $[0, 1]$ که تابع نزولی اکید و نامنفی است، محاسبه و آن گاه آن را دوبرابر می کنیم.

$$\Delta x = \frac{1 - (-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ عرض هر مستطیل}$$



$$L_n f = 2 \times \Delta x \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}} + \sqrt{1 - \frac{4}{16}} + \sqrt{1 - \frac{9}{16}} + 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{12}{16}} + \sqrt{\frac{7}{16}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$$

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{6i^2}{n^3} + 3\right) = \sum_{i=1}^n \frac{6i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^n 3 = \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + 3n \\ &= \frac{6}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n = \frac{(n+1)(2n+1)}{n} + 3n \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1 + 3n^2}{n} = \frac{5n^2 + 3n + 1}{n}\end{aligned}$$

مثال ۳. در تابع با ضابطه ی $f(x) = 6x^2 + 3x$ ، مطلوب

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \text{ است محاسبه ی}$$

حل: ابتدا $\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ را مانند مثال ۲ محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{6i^2}{n^3} + \frac{3i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{6i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^n \frac{3i}{n} \\ &= \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{6}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{n} + \frac{3(n+1)}{2} = \frac{4n^2 + 5n + 1}{n}\end{aligned}$$

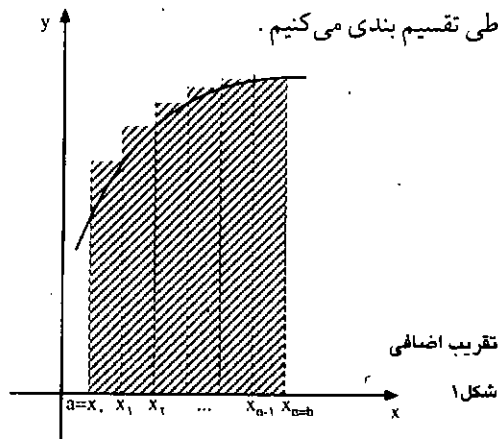
حال $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ را محاسبه می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4n^2 + 5n + 1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n + 1}{n^2} = 4$$

مجموع ریمان ها

فرض می کنیم تابع با ضابطه ی $y=f(x)$ ، تابعی پیوسته و در بازه ی $[a,b]$ نامنفی و صعودی اکید باشد. می خواهیم اندازه ی سطح زیر نمودار تابع را با محور x ها، در فاصله ی دو خط $x=a$ و $x=b$ به طور دقیق محاسبه کنیم.

برای این کار، سطح زیر منحنی را به n مستطیل محیطی و محاطی تقسیم بندی می کنیم.



$$U_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 2) = \frac{4}{n} (n+1) = \frac{4(n+1)}{n}$$

واحد مربع

اگر n زوج باشد: $\Delta x = \frac{4}{n}$

$$L_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = \frac{4}{n} (n) = 4$$

واحد مربع

$$U_n f = \Delta x (1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 2 + 2) = \frac{4}{n} (n+2) = \frac{4(n+2)}{n}$$

واحد مربع

مجموع n جمله

$$1) \sum_{i=p}^n a = (n-p+1)a \quad n, p \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$2) \sum_{i=1}^n a = an \quad n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$3) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4) \sum_{i=1}^n ki = k \sum_{i=1}^n i \quad k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

$$5) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6) \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

مثال ۱. در تابع با ضابطه ی $f(x) = 5x - 2$ ، مطلوب است

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \text{ محاسبه ی}$$

حل:

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{5i}{n} - 2\right) = \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} - \sum_{i=1}^n 2 = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 2$$

$$= \frac{5}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{5}{2} (n+1) - 2n = \frac{5n + 5 - 4n}{2} = \frac{n+5}{2}$$

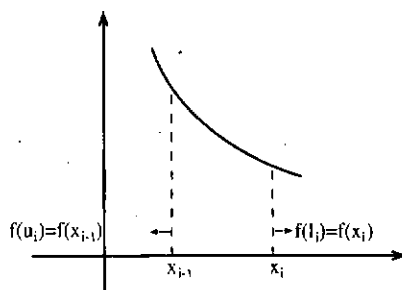
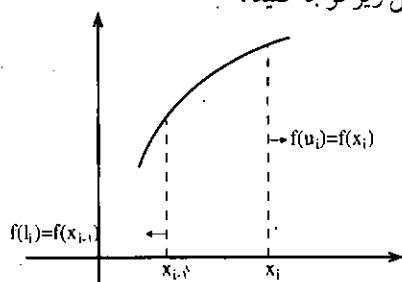
مثال ۲. در تابع با ضابطه ی $f(x) = 6x^2 + 3$ ، مطلوب

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \text{ است محاسبه ی}$$

$$\text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(l_i)$$

$$\text{مجموع بالا ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i)$$

به دو شکل زیر توجه کنید:



بنابراین می توان نوشت، اگر تابع f صعودی اکید باشد، آن گاه:

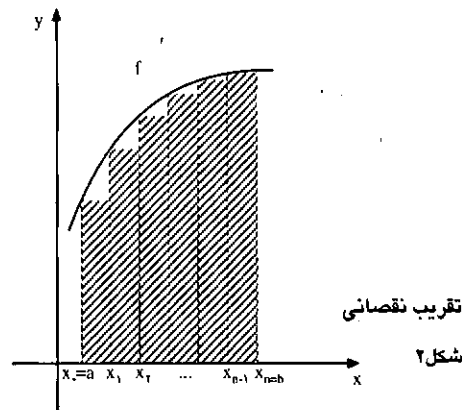
$$\begin{cases} \text{مجموع بالا ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ \text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(l_i) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \end{cases}$$

اگر تابع f نزولی اکید باشد، آن گاه:

$$\begin{cases} \text{مجموع بالا ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \\ \text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(l_i) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i) \end{cases}$$

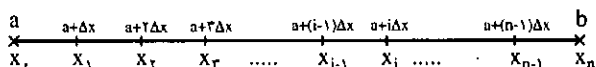
اگر C_i نقطه‌ی دلخواهی در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، آن گاه:

$$\text{مجموع ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(c_i)$$



به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می کنید، هر چه تعداد مستطیل‌ها زیاده‌تر شود، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی و محاطی، به اندازه‌ی سطح زیر منحنی در بازه $[a, b]$ نزدیک‌تر خواهد شد.

اگر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، عرض مستطیل‌ها باشد، بازه $[a, b]$ دارای تقسیمات زیر است:



در قسمت پایین خط، اسم نقطه‌ها و در قسمت بالای خط، طول نقطه‌ها نوشته شده است.

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی

$$\Delta x (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی

$$\Delta x (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی را پایین ریمان و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی را بالا ریمان گویند.

در این مثال:

$$\text{مجموع پایین ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

$$\text{مجموع بالا ریمان} = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

در حالت کلی، اگر ماکزیمم مطلق تابع f در بازه‌ی

$[x_{i-1}, x_i]$ را با $f(u_i)$ و می‌نیمم مطلق تابع f را در این بازه با $f(l_i)$ نشان دهیم، آن گاه: