

یک دسته گل انتخاب

میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

فرض کنیم دو نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع، موجود است. می خواهیم دسته گلی با چهار شاخه گل از این دو نوع گل انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

اگر x_1 گل از نوع اول و x_2 گل از نوع دوم انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با چهار شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله ی زیر را داریم:

$$x_1 + x_2 = 4$$

جواب های صحیح و نامنفی معادله ی اخیر را می توان به صورت جدول زیر نوشت:

x_1	x_2
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0

ملاحظه می کنیم که معادله ی $x_1 + x_2 = 4$ دارای 5 جواب صحیح و نامنفی است که عبارت اند از: $(0, 4)$ ، $(1, 3)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 1)$ و $(4, 0)$.

در حالت کلی فرض کنید، k نوع متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است و می خواهیم، n شاخه گل از این k نوع گل

انتخاب کنیم. اگر x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و... و x_k گل از نوع k ام انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با n شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله ی زیر را خواهیم داشت:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = n; \quad (x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k)$$

اکنون برای یافتن تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی (1)، قضیه ی زیر را بیان می کنیم.

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

قضیه: فرض کنیم، k نوع متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. ثابت کنید تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن ها تکرار نیز مجاز است، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

برهان: k نوع متفاوت گل را می توان با $(k-1)$ پاره خط متمایز کرد. هم چنین، اگر تعداد انتخاب های گل ها، از هر نوع را با تعدادی علامت ستاره (*) مشخص کنیم (باید تعداد ستاره ها برابر با n باشد)، در این صورت دارای n ستاره و $(k-1)$ پاره خط هستیم. در نتیجه، $((n+k-1))$ خط و ستاره وجود دارد که تعداد کل تبدیلات این اشیاء برابر با $((n+k-1))!$ است. اگر در این تبدیلات، پاره خط ها را یا ستاره ها را با هم جابه جا کنیم، حالت جدیدی ایجاد نمی شود، بنابراین طبق قاعده ی تبدیلی با تکرار خواهیم داشت:

نوع اول	نوع دوم	...	نوع k ام
**	****	...	*****

$(k-1)$ = تعداد پاره خط ها، n = تعداد ستاره ها)

$$P_n = \frac{(n+(k-1))!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

نتیجه: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی (۱) برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

دیدیم که معادله ی $x_1 + x_2 = 4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است. اکنون می توان با استفاده از فرمولی که به دست آورده ایم، تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله را محاسبه کنیم.

$$n=4, k=2; \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+2-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$$

مثال: به چند طریق می توان ۸ عدد شکلات را بین ۶ نفر طوری تقسیم کرد، که ممکن است به بعضی ها شکلات نرسد؟

حل: اگر x_1 شکلات به نفر اول و x_2 شکلات به نفر دوم و... و x_6 شکلات به نفر ششم بدهیم، معادله ی زیر را خواهیم داشت: $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 8; (x_i \geq 0, i=1,2,\dots,6)$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی بالا برابر است با:

$$n=8, k=6; \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+6-1}{6-1} = \binom{13}{5} = 1287$$

مثال: دستگاه معادله های $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$

چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل: معادله ی $x_1 + x_2 = 3$ دارای $\binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$

جواب صحیح نامنفی است. اگر در معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$ قرار دهیم، $x_1 + x_2 = 3$ ، بنابراین معادله ی $x_3 + x_4 + x_5 = 4$ به دست می آید که دارای

$$15 = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2}$$

ضرب، این دستگاه دارای $6 \times \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$ جواب صحیح و نامنفی است.

مسئله: تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ را بیابید.

حل: می دانیم: $a \leq b$ ؛ یعنی وجود دارد عدد حقیقی نامنفی $y \geq 0$ به طوری که: $a + y = b$. بنابراین تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ برابر با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 10$ است. این تعداد جواب برابر است با:

$$n=10, k=5; \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{14}{4}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(x+y)^8$ را بیابید.

حل: می دانیم، عبارت حرفی هر جمله ی بسط $(x+y)^n$ به صورت $x^{n_1} y^{n_2}$ است که در آن: $n_1 + n_2 = n$ و $n_1 \geq 0$ و $n_2 \geq 0$. در نتیجه، تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله برابر با تعداد جملات بسط است. در نتیجه:

$$n=8, k=2; \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+2-1}{2-1} = \binom{9}{1} = 9$$

تعداد جملات بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$

هر جمله ی بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ دارای عبارت حرفی به صورت $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ است که در آن، $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ و برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم: $n_i \geq 0$. در نتیجه، تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله، برابر با تعداد جملات این بسط است که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ را بیابید.

حل: $n=10, k=3$. پس تعداد جملات بسط برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

می خواهیم ۸ عدد شکلات را بین ۳ نفر تقسیم کنیم، به طوری که به هر یک حداقل یک شکلات برسد، این کار به چند طریق ممکن است؟ به این منظور، ابتدا به هر نفر یک شکلات می دهیم. سپس

کنیم و ممکن است به کسی میوه نرسد؟ (ب) به هر نفر حداقل یک میوه برسد؟ (ج) به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟
حل:

الف) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را به صورت دل‌خواه بین ۴ نفر تقسیم کنیم. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ را پیدا می‌کنیم که برابر است با:

$$\binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$$

ب) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را طوری بین ۴ نفر تقسیم کنیم که به هر یک حداقل یک عدد میوه برسد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ را می‌یابیم که برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{13-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

ج) ابتدا به هر نفر یک سیب می‌دهیم، بنابراین ۳ سیب و ۶ پرتقال برایمان باقی می‌ماند که در مجموع ۹ عدد میوه داریم. اکنون ۹ میوه را بین ۴ نفر تقسیم می‌کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر، جواب است.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad (I)$$

را با شرط $x_1 > 0$ ، $x_2 \geq 2$ و $x_3 > 3$ به دست آورید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_1 > 0 \Rightarrow x_1 \geq 1 \Rightarrow \overbrace{x_1 - 1}^{y_1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow \overbrace{x_2 - 2}^{y_2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 + 2 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{y_3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 + 4 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) در معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$y_1 + 1 + y_2 + 2 + y_3 + 4 = 10 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 3 \quad (II)$$

چون در این معادله، $y_1 \geq 0$ ، $y_2 \geq 0$ ، $y_3 \geq 0$ ، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را به دست می‌آوریم که با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرایط $x_1 > 0$ ، $x_2 \geq 2$ و $x_3 > 3$ برابر است؛ زیرا با تغییر متغیرهایی که روی معادله‌ی (I) انجام دادیم، معادله‌ی (II) را به دست آوردیم. برای مثال، (۱) و (۱) یک جواب برای معادله‌ی

۲ شکلات باقی می‌ماند که باید آن را بین ۶ نفر تقسیم کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$ برابر است با:

$$n = 2, k = 6; \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{5} = 21$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به دست آوریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

به این منظور، فرض کنیم می‌خواهیم که n شیء را بین k نفر تقسیم کنیم، به طوری که به هر یک حداقل یک شیء برسد. بنابراین ابتدا به هر یک از k نفر، یک شیء می‌دهیم. در نتیجه $(n-k)$ شیء، باقی می‌ماند که باید آن را بین k نفر تقسیم کنیم. پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n-k$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت که در جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم:

$$x_i > 0$$

چون برای هر $0 \leq i \leq k$ ، x_i یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است، یعنی $x_i > 0$ ، پس: $x_i \geq 1$ در نتیجه: $x_i - 1 \geq 0$ و بنابراین داریم:

$$x_1 > 0 \Rightarrow x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 - 1 \geq 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_k > 0 \Rightarrow x_k \geq 1 \Rightarrow x_k - 1 \geq 0$$

اکنون اگر قرار دهیم $y_i = x_i - 1 \geq 0$ ، $(1 \leq i \leq k)$ ، بنابراین: $x_i = y_i + 1$ پس داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n, \quad x_i = y_i + 1 \Rightarrow \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + \dots + y_k + 1 = n \Rightarrow$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k$$

در معادله‌ی بالا، برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم: $y_i \geq 0$ که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، جواب مسئله است و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین چهار نفر تقسیم کرد، به طوری که: الف) به صورت دل‌خواه میوه‌ها را تقسیم

(II) است، به طوری که: $y_1 = 1$ و $y_2 = 2$ و $y_3 = 1$. اکنون اگر این مقادیر را در رابطه‌های (1)، (2)، (3) جای‌گزین کنید، ملاحظه خواهید کرد که: $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$. بنابراین (2 و 3 و 5) یک جواب معادله‌ی (I) با شرایط داده شده است.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 \quad \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II)}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ را با شرط $x_i \geq 3$ برای $i = 1, 2, 3, 4$ پیدا کنید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_i \geq 3 \Rightarrow \overbrace{x_i}^{y_i} - 3 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i + 3 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

با قرار دادن رابطه‌ی بالا در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 + y_4 + 3 = 17 \Rightarrow$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی آخری با تعداد جواب‌های مسئله برابر است، بنابراین:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

مثال: مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر:

$$x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

حل: با توجه به معادله داریم: $0 \leq x_1 \leq 3$ ، در نتیجه:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{11}{2} = 55$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 66 + 55 + 28 + 3 = 152$$

$$\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{1} = 4$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3}{1} = 3$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2}{1} = 2$$

$$x_1 = 9 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{1}{1} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

حل: با توجه به معادله، ملاحظه می‌کنیم که $0 \leq x_3 \leq 3$ ، در نتیجه داریم:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 13$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{16}{3} = 560$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 9$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{12}{3} = 220$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8}{3} = 56$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{3} = 4$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 560 + 220 + 56 + 4 = 840$$

در ادامه‌ی بحث، برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ با شرطی مانند $a \leq x_i \leq b$ ؛ $a, b \in \mathbb{Z}, (1 \leq i \leq n)$ باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. از این رو، ابتدا این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد. در این صورت، تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم. در این حالت می‌نویسیم:

$$|A| = n$$

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد ($n \in \mathbb{N}$). اگر A_1 و A_2 دو زیر مجموعه‌ی A باشند، برای محاسبه‌ی

به طوری که از رز زرد ۲ تا ۵ شاخه و از رز سفید ۱ تا ۳ شاخه در آن موجود باشد. این انتخاب دسته گل به چند طریق ممکن است.
حل: فرض کنیم x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و x_3 گل از نوع سوم انتخاب کنیم. در این صورت، با توجه به صورت مثال داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2 \leq x_1 \leq 5 \\ 1 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$$

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم:

$$2 \leq x_1 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 3 \\ x_1 = y_1 + 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x_2 - 1 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 2 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن تغییر متغیرهای (۱) و (۲) در معادله داریم:

$$y_1 + 2 + y_2 + 1 + x_3 = 9 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 6$$

اکنون معادله‌ی (۱) $y_1 + y_2 + x_3 = 6$ را با شرایط $0 \leq y_1 \leq 3$ و $0 \leq y_2 \leq 2$ داریم. پیدا کردن تعداد جواب‌های این معادله با شرایط داده شده به طور مستقیم کاری دشوار است. به همین منظور، به روش غیرمستقیم و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول جواب مسئله را می‌یابیم. برای انجام این کار، ابتدا تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱) را به دست می‌آوریم و آن را $|A|$ می‌نامیم: $|A| = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$. و سپس تعداد جواب‌هایی از معادله‌ی (۱) را می‌یابیم که در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند. با توجه به مجموعه‌های زیر، حاصل عددی عبارت $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, x_3) \mid y_1 > 3\}$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, x_3) \mid y_2 > 2\}$$

در این مرحله $|A_1 \cup A_2|$ را به دست می‌آوریم. به این منظور باید $|A_1|$ و $|A_2|$ و $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کنیم:

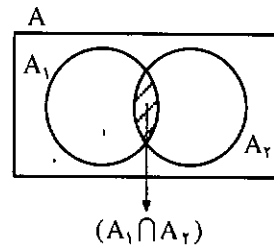
$$y_1 > 3 \Rightarrow y_1 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} z_1 \geq 0 \\ y_1 = z_1 + 4 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$z_1 + 4 + y_2 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + y_2 + x_3 = 2$$

$|A_1 \cup A_2|$ ، ابتدا حاصل جمع $|A_1| + |A_2|$ را به دست می‌آوریم. در این حاصل جمع، تعداد عضوهای مشترک بین A_1 و A_2 دوباره شمرده می‌شوند، یعنی مقدار $|A_1 \cap A_2|$ را دوبار به حساب می‌آوریم (شمول آن‌ها دوبار به حساب آمده است). بنابراین، $|A_1 \cap A_2|$ یک بار در A_1 یک بار در A_2 محاسبه شده است. برای محاسبه‌ی تعداد عضوهای که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی A_1 یا A_2 تعلق دارند، یعنی $|A_1 \cup A_2|$ ، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت (عدم شمول)، در نتیجه داریم:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از مجموعه‌های A_1 و A_2 تعلق نداشته باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم ($\bar{A}_1$ را متمم مجموعه‌ی A_1 در نظر می‌گیریم):

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = n - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|)$$

زیرا:

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \overline{(A_1 \cup A_2)}$$

اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد. اگر A_1 ، A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از A باشند، برای محاسبه‌ی $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ ؛ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از سه مجموعه‌ی A_1 ، A_2 و A_3 تعلق نداشته باشند، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = n - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

محاسبه‌ی تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ با شرط } a \leq x_i \leq b$$

اکنون وقت آن رسیده است که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد جواب‌های صحیح این معادله را در حالتی که برای $a, b \in W, i = 1, 2, \dots, n, a \leq x_i \leq b$ به دست آوریم. برای تشریح این موضوع از چند مثال و مسئله استفاده می‌کنیم.

مثال: در یک گل فروشی، سه رنگ متفاوت گل رز وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم دسته‌گلی با ۹ شاخه گل رز انتخاب کنیم

اگر مجموعه های A_1 و A_2 را به صورت زیر در نظر بگیریم،
آن گاه $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15, y_1 \geq 6\}$$

$$= \{(z_1, y_2, y_3) \mid z_1 + y_2 + y_3 = 9, z_1 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15, y_2 \geq 7\}$$

$$= \{(y_1, z_2, y_3) \mid y_1 + z_2 + y_3 = 8, z_2 > 0\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(z_1, z_2, y_3) \mid z_1 + z_2 + y_3 = 2, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1 \cup A_2| = 136 - (55 + 45 - 6) = 42$$

مثال: به چند طریق می توان ۷ مهره ی یکسان را درون سه جعبه ی متمایز طوری قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۴ مهره قرار گیرد؟

حل: فرض کنیم در جعبه ی اول x_1 مهره، در جعبه ی دوم x_2 مهره و در جعبه ی سوم x_3 مهره قرار دهیم. بنابراین داریم:
 $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad (I), \quad x_i \leq 4, \quad i = 1, 2, 3$

چون یافتن تعداد جواب های صحیح این معادله به طور مستقیم مقدور نیست، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می یابیم:

$$x_i \leq 4 \Rightarrow x_i > 4 \Rightarrow x_i \geq 5, \quad i = 1, 2, 3$$

اگر مجموعه های A_1, A_2, A_3 را به صورت زیر تعریف کنیم
آن گاه $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$ جواب مسأله است.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_1 \geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_2 \geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{4}{2} = 6$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$y_2 > 2 \Rightarrow y_2 \geq 3 \Rightarrow \overbrace{y_2 - 3}^{z_2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 \geq 0 \\ y_2 = z_2 + 3 \end{cases} \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه ی (۴) در معادله ی (I) داریم:

$$y_1 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow y_1 + z_2 + x_3 = 3$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

برای محاسبه ی $|A_1 \cap A_2|$ ، کافی رابطه های (۳) و (۴) را با هم

در معادله ی (I) قرار دهیم؛ یعنی:

$$z_1 + 4 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + z_2 + x_3 = -1$$

(معادله جواب ندارد) $\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$

ملاحظه می کنیم که $|A_1| = 6$ ، $|A_2| = 10$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$.

بنابراین داریم:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1 \cup A_2| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 28 - 6 - 10 + 0 = 12$$

مثال: تعداد جواب های صحیح معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ را با شرایط $2 \leq x_1 \leq 7$ ، $3 < x_2 < 11$ و $x_3 > 3$ به دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می دهیم:

$$2 \leq x_1 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq \overbrace{x_1 - 2}^{y_1} \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2 \\ 0 \leq y_1 \leq 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$3 < x_2 < 11 \Rightarrow 4 \leq x_2 \leq 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq \overbrace{x_2 - 4}^{y_2} \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 + 4 \\ 0 \leq y_2 \leq 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{y_3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 + 4 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه های (۱)، (۲) و (۳) در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 2 + y_2 + 4 + y_3 + 4 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 15 \quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه ی جواب های صحیح و نامنفی معادله ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$$

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3, x_4) | y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21, y_1 \geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3} = 816$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3, x_4) | y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21, y_2 \geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3} = 816$$

$$A_3 = \{(y_1, y_2, y_3, x_4) | y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21, y_3 \geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_3| = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3} = 816$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(y_1, y_2, y_3, x_4) | y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21, y_1 \geq 6, y_2 \geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

به همین ترتیب $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 220$ و هم چنین

داریم:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(y_1, y_2, y_3, x_4) | y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21, y_1 \geq 6, y_2 \geq 6, y_3 \geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= 2024 - (816 + 816 + 816 - 220 - 220 - 220 + 20) \\ &= 216 \end{aligned}$$

در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \text{ با شرایط } -2 \leq x_i \leq 3 \text{ (} i=1,2,3 \text{)},$$

با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21$ با شرایط

$$0 \leq y_i \leq 5 \text{ (} i=1,2,3 \text{)} \text{ برابر است که تعداد این جواب‌ها ۲۱۶ است.}$$

مسئله: چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ وجود دارد،

به طوری که مجموع رقم‌های آن برابر با ۲۱ و رقم یکان آن‌ها بیشتر از ۵ باشند؟

حل: فرض کنیم $a_4 a_3 a_2 a_1$ عدد چهاررقمی مورد نظر باشد.

چون این عدد باید بیشتر از ۲۰۰۰ باشد. بنابراین: $2 \leq a_4 \leq 9$. از

طرف دیگر، باید مجموع رقم‌های این عدد برابر با ۲۱ باشد.

بنابراین: $(I) a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 21$. هم چنین، رقم یکان این

عدد باید بیشتر از ۵ باشد، پس: $5 < a_1 \leq 9$. a_3, a_2 رقم‌های

دهگان و صدگان هستند، در این صورت $0 \leq a_2 \leq 9$ و

$0 \leq a_3 \leq 9$. در نتیجه برای یافتن جواب مسئله باید تعداد

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_2 \geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_1 \geq 5, x_2 \geq 5\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = -3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 0$$

بنابراین داریم:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

اگر A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \text{ باشد، آن‌گاه داریم:}$$

$$|A| = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

بنابراین:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 36 - (6 + 6 + 6 - 0) = 18$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \text{ را با شرایط } -2 \leq x_i \leq 3 \text{ و}$$

$1 \leq i \leq 3$ به دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در

معادله انجام می‌دهیم:

$$-2 \leq x_i \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \overbrace{x_i}^{y_i} + 2 \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i - 2 \\ 0 \leq y_i \leq 5 \end{cases} \quad i=1,2,3$$

بنابراین داریم:

$$y_1 - 2 + y_2 - 2 + y_3 - 2 + x_4 = 15 \Rightarrow$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 21 \quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی

معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{21+4-1}{4-1} = \binom{24}{3} = 2024$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به طور مستقیم

مقدور نیست، بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به

روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$0 \leq y_i \leq 5 \Rightarrow y_i > 5 \Rightarrow y_i \geq 6, \quad i=1,2,3$$

اگر مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را به صورت زیر در نظر

گیریم، آن‌گاه $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$ جواب مسئله است.

$$|A_4| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

برای محاسبه $|A_1 \cap A_2|$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \geq 0 \end{cases} \\ a_2 \geq 10 \Rightarrow \overbrace{a_2 - 10}^{z_2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = z_2 + 10 \\ z_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه‌های اخیر در معادله‌ی (II)، می‌توان $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کرد:

$$z_1 + 4 + z_2 + 10 + a_3 + y_3 = 13 \Rightarrow z_1 + z_2 + a_3 + y_3 = -1 \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب داریم:

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3}$$

هم‌چنین داریم:

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0; 1 \leq i < j < k \leq 4$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه^۱ داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= \binom{16}{3} - \left[\binom{12}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3} - \binom{4}{3} \right] \\ &= 560 - [220 + 20 + 20 + 56 - 4] = 248 \end{aligned}$$

زیرنویس

۱. فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آن‌ها، k نوع شیء متمایز ($k \leq n$) وجود داشته باشد؛ به طوری که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع k ام باشند و: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیل‌های متمایز این n شیء برابر است با:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

۲.

جواب‌های صحیح معادله‌ی (I) را با توجه به شرایط به دست آمده، محاسبه کرد.

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم.

$$0 < a_1 \leq 9 \Rightarrow 6 \leq a_1 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \overbrace{a_1 - 6}^{y_1} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = y_1 + 6 \\ 0 \leq y_1 \leq 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$2 \leq a_2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \overbrace{a_2 - 2}^{y_2} \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = y_2 + 2 \\ 0 \leq y_2 \leq 7 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + 6 + a_2 + a_3 + y_2 + 2 = 21 \Rightarrow$$

$$y_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \quad (II)$$

اکنون باید تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی (II) را با شرایط $0 \leq y_1 \leq 3$ ، $0 \leq a_2 \leq 9$ ، $0 \leq a_3 \leq 9$ و $0 \leq y_2 \leq 7$ محاسبه کرد. به این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه استفاده می‌کنیم. اگر A مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی

$$\text{معادله‌ی (II) باشد، آن‌گاه } |A| = \binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$$

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرد:

$$A_1 = \{y_1 \geq 4\} \text{ جواب‌های صحیح معادله با شرط}$$

$$A_2 = \{a_2 \geq 10\} \text{ جواب‌های صحیح معادله با شرط}$$

$$A_3 = \{a_3 \geq 10\} \text{ جواب‌های صحیح معادله با شرط}$$

$$A_4 = \{y_2 \geq 8\} \text{ جواب‌های صحیح معادله با شرط}$$

حالا باید $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ را پیدا کنیم. به این منظور داریم:

$$y_1 \geq 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (II) داریم:

$$z_1 + 4 + a_2 + a_3 + y_2 = 13 \Rightarrow z_1 + a_2 + a_3 + y_2 = 9 \Rightarrow$$

$$|A_1| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_2| = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}, |A_3| = \binom{6}{3},$$