



اعداد فیوناتچی



اشاره

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیوناتچی و رابطه‌ها و خواص بین این اعداد پرداختیم، در ادامه مطلب باز هم درباره رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

هنگامی که $n=2$ ، نامساوی (2101) به (2201) :
 $\alpha^7 \leq (\alpha^4 - 1)^2$
 منجر می‌شود. این نامساوی را می‌توان با محاسبه مستقیم
 محقق ساخت. گرچه، آن را می‌توان با به کار بردن بعضی از
 ویژگی‌های مستخرج در بخش ۱۷ نیز به اثبات رساند. به ویژه
 داریم:

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10$$

بنابراین (2201) را می‌توان به صورت:

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \leq 15\alpha + 10$$

بازنویسی کرد که واضح است. سرانجام، اگر $n=3$ ،
 آن‌گاه (2101) بر این است که:

$$\alpha^7 \leq (\alpha^6 - 1)^2$$

و می‌توان این نامساوی را به همان طریق فوق اثبات کرد.
 اکنون فرض می‌کنیم (2101) به ازای $n > 2$ برقرار باشد و
 می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \leq (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}$$

برای این کار، کافی است نشان دهیم هرگاه به جای n مقدار
 $n+1$ را قرار دهیم، سمت راست (2101) سریع‌تر از سمت
 چپ افزایش می‌یابد. واضحاً سمت چپ توسط فاکتور α^{2n+2}

۲۱. دستاورد اصلی بخش پیشین را می‌توانیم مشخص‌تر
 کنیم، قضیه بعدی بعدها مورد استفاده قرار خواهد گرفت.
 قضیه.

$$\frac{\alpha^{n-(1/n)}}{\sqrt{5}} \leq u_n \leq \frac{\alpha^{n+(1/n)}}{\sqrt{5}}$$

 اثبات. در این مورد، کارمان را محدود به اثبات سمت
 چپ این نامساوی دوگانه می‌کنیم. اثبات سمت راست، مشابه
 آن است.
 از آن‌جا که طبق فرمول بینه:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

و از آن‌جا که $\alpha\beta = -1$ ، کافی است نشان دهیم که:

$$\alpha^{n-(1/n)} \leq \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}$$

یا

$$\alpha^{2n-(1/n)} \leq \alpha^{2n} - 1$$

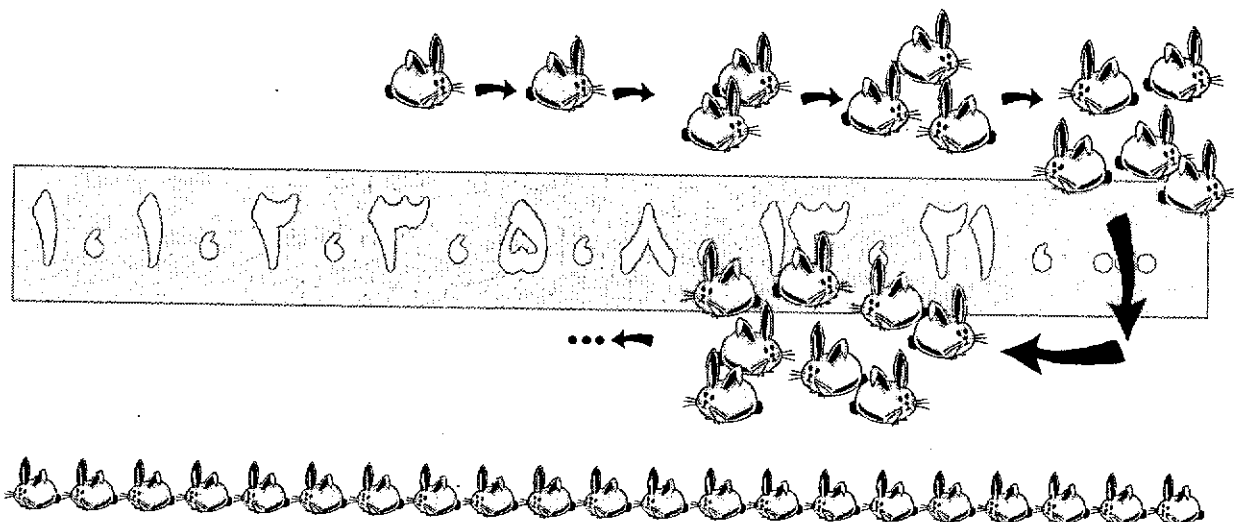
یا با به توان n رساندن دو طرف:

$$\alpha^{2n^2-1} \leq (\alpha^{2n} - 1)^n \quad (2101)$$

اثبات (2101) با استقرای بر n انجام می‌گیرد. اگر $n=1$ ،
 آن‌گاه نامساوی (2101) می‌شود:

$$\alpha \leq \alpha^2 - 1$$

که در واقع برقرار است. در واقع یک تساوی داریم.



زیاد می شود. اکنون افزایش سمت راست را برآورد می کنیم. و به این ترتیب، قضیه به اثبات می رسد. داریم:

$$\frac{(\alpha^{r(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{rn} - 1)^n} = (\alpha^{r(n+1)} - 1) \left(\frac{\alpha^{r(n+1)} - 1}{\alpha^{rn} - 1} \right)^n$$

آخرین کسر از α^2 بزرگ تر است و گذشته از این:

$$\frac{\alpha^{r(n+1)} - 1}{\alpha^{rn} - 1} - \alpha^r = \frac{\alpha^{rn+r} - 1 - \alpha^{rn+r} + \alpha^r}{\alpha^{rn} - 1}$$

$$= \frac{\alpha^r - 1}{\alpha^{rn} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha^{rn} - 1} > \frac{\alpha}{\alpha^{rn}} = \frac{1}{\alpha^{rn-1}}$$

بنابراین با استفاده از فرمول دو جمله ای (به عنوان نمونه، بخش ۱۱ این بخش را ملاحظه کنید) به دست می آوریم:

$$\left(\frac{\alpha^{r(n+1)} - 1}{\alpha^{rn} - 1} \right)^n > \left(\alpha^r + \frac{1}{\alpha^{rn-1}} \right)^n = \alpha^{rn} + n \frac{\alpha^{rn-r}}{\alpha^{rn-1}} + \dots$$

که در آن نقطه ها به جای جمله های مثبت نامرتبط قرار دارند.

عبارت اخیر، هنگامی که $n > 2$ ، بزرگ تر از $\alpha^{2n} + 1$ است؛ بنابراین:

$$\frac{(\alpha^{r(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{rn} - 1)^n} > (\alpha^{r(n+1)} - 1)(\alpha^{rn} + 1)$$

$$= \alpha^{rn+r} + \alpha^{rn+r} - \alpha^{rn} - 1$$

$$= \alpha^{rn+r} + \alpha^{rn}(\alpha^r - 1) - 1$$

$$= \alpha^{rn+r} + \alpha^{rn+1} - 1 > \alpha^{rn+r}$$

۲۲. در این جارده دیگری از دنباله هایی را بررسی می کنیم که به کمک اعداد فیبوناچی ایجاد شده اند. در آغاز کار، فرض می کنیم x عددی دلخواه باشد؛ در این صورت هدفمان محاسبه مجموع زیر است:

$$s_n(x) = u_1 x + u_2 x^r + \dots + u_n x^n$$

برای انجام این کار، ابتدا از فرمول بین استفاده و حاصل می کنیم:

$$s_n(x) = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\delta}} x + \frac{\alpha^r - \beta^r}{\sqrt{\delta}} x^r + \dots + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{\delta}} x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}} (\alpha x + \alpha^r x^r + \dots + \alpha^n x^n) - \frac{1}{\sqrt{\delta}} (\beta x + \beta^r x^r + \dots + \beta^n x^n) \quad (23.1)$$

در عبارت اخیر، با مجموع های دو تصاعد هندسی با قدر نسبت های به ترتیب αx و βx مواجه می شویم. فرمول معروف بیانگر مجموع تصاعد هندسی متناهی، تنها زمانی دارای معناست که قدر نسبت آن متفاوت با ۱ باشد. در حالتی که قدر نسبت مورد بحث برابر با ۱ است، تصاعد متناظر شامل جمله هایی برابر با یکدیگر است و این مجموع را می توان به سادگی محاسبه کرد.

در ارتباط با موارد پیشین، ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که در آن $\alpha x \neq 1$ و $\beta x \neq 1$ ؛ یعنی: $x \neq 1/\alpha = -\beta$ و $x \neq 1/\beta = -\alpha$. هرگاه چنین باشد، با محاسبه مجموع های





مجموع این تصاعد برابر n می شود؛ همچنین قدر نسبت تصاعد دوم برابر $-\beta^2$ می شود. بنابراین:

$$\begin{aligned} s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(n - (\beta^2 - \beta^2 + \dots + (-1)^{n-1} \beta^{2n}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(n - \frac{\beta^2 - (-1)^n \beta^{2n+2}}{1 + \beta^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(n - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} + (-1)^n \beta^{2n} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) \end{aligned}$$

سرانجام، با ملاحظه این که:

$$1 + \beta^2 = 2 + \beta = 2 + \frac{1 - \sqrt{\delta}}{2} = \frac{5 - \sqrt{\delta}}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} &= \frac{1 + \beta}{2 + \beta} = \frac{2 - \sqrt{\delta}}{5 - \sqrt{\delta}} = \frac{(2 - \sqrt{\delta})(5 + \sqrt{\delta})}{(5 - \sqrt{\delta})(5 + \sqrt{\delta})} \\ &= \frac{10 - 2\sqrt{\delta}}{20} \end{aligned}$$

به دست می آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{n}{\sqrt{\delta}} - \frac{\sqrt{\delta} - 1}{10} + (-1)^n \beta^{2n} \frac{\sqrt{\delta} - 1}{10} \quad (2501)$$

برای نتیجه گرفتن، فرض می کنیم:

$$x = 1/\beta = -\alpha$$

در این حالت، قدر نسبت های تصاعدهای اخیر و قبلی واقع در (2301)، برابر 1 و $-\alpha^2$ اند. بنابراین داریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left((\alpha^2 - \alpha^2 + \dots + (-1)^{n-1} \alpha^{2n}) - n \right)$$

با مجاسبه ای مشابه با مورد پیشین، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\alpha^2 - (-1)^n \alpha^{2n+2}}{1 + \alpha^2} - n \right)$$

مشمول در (2301) فوق، به دست می آوریم:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{\alpha^{n+1} x^{n+1} - \alpha x}{\alpha x - 1} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{\beta^{n+1} x^{n+1} - \beta x}{\beta x - 1}$$

یا بعد از چند تبدیل آشکار:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{(\alpha^{n+1} x^{n+1} - \alpha x)(\beta x - 1) - (\beta^{n+1} x^{n+1} - \beta x)(\alpha x - 1)}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)}$$

و گذشته از این:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\alpha^{n+1} \beta x^{n+2} - \alpha^{n+1} x^{n+1} + \alpha x}{\alpha \beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \beta^{n+1} x^{n+2} - \beta^{n+1} x^{n+1} + \beta x}{\alpha \beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} \right) \end{aligned}$$

اکنون با به خاطر آوردن این مطلب که $\alpha\beta = -1$ ،

$\alpha + \beta = 1$ و $\alpha - \beta = \sqrt{\delta}$ ، داریم:

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{x\sqrt{\delta} - (\alpha^n - \beta^n)x^{n+2} - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

و سرانجام:

$$s_n(x) = \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^2} \quad (2401)$$

به ویژه با قرار دادن $x=1$ در (2401)، حاصل می کنیم:

$$s_n(1) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1 - u_n - u_{n+1}}{-1} = u_{n+2} - 1$$

که همان فرمولی است که قبلاً در بخش 1 ذکر شد.

به ازای $x=-1$ ، داریم:

$$\begin{aligned} s_n(-1) &= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n \\ &= \frac{-1 - u_n(-1)^{n+2} - u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$$

که به معادله (601) واقع در بخش 3 بر می گردد.

اکنون به ذکر دو حالت «استثنایی» می پردازیم.

فرض می کنیم:

$$x = 1/\alpha = -\beta$$

در این صورت در (2301) هر جمله تصاعد اول برابر 1 و



حد را می توان با استفاده از فرمول (۲۴۰۱) محاسبه کرد.
به این ترتیب، کارمان را بر مبنای قضیه واقع در بخش ۲۰،
ادامه داده، به دست می آوریم:

$$u_n \leq \frac{\alpha^n}{\sqrt{\delta}} + 1$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n x^{n+\gamma} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{\delta}} + 1 \right) x^{n+\gamma} \\ &= \frac{x^\gamma}{\sqrt{\delta}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+\gamma} \end{aligned}$$

از آن جا که واضحاً $|\alpha x| < 1$ مستلزم $|x| < 1$ است، نتیجه
می گیریم که دو حد اخیر برابر صفرند و از آن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n x^{n+\gamma} = 0$$

استدلالی مشابه به دست می دهد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} x^{n+1} = 0$$

در نتیجه، هنگامی که n بدون محدودیت افزایش یابد، با
حد گرفتن در معادله (۲۴۰۱)، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - u_n x^{n+\gamma} - u_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^\gamma} \\ &= \frac{1}{1 - x - x^\gamma} \left(x - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n x^{n+\gamma} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} x^{n+1} \right) \\ &= \frac{x}{1 - x - x^\gamma} \end{aligned}$$

نتیجه به دست آمده را می توان، به گونه ای پاکیزه، به
صورت زیر نوشت:

$$u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots = \frac{x}{1 - x - x^\gamma} \quad (2801)$$

از (۲۸۰۱) و با تخصیص مقادیر خاص به متغیر x ،
می توان فرمول های گوناگون بسیاری استخراج کرد. به عنوان
نمونه، با قرار دادن $x = 1/2$ ، به مورد زیر می رسم:

$$\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} + \dots = 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left((-1)^{n+1} \alpha^{\gamma n} \frac{\alpha^\gamma}{1 + \alpha^\gamma} + \frac{\alpha^\gamma}{1 + \alpha^\gamma} - n \right)$$

و در نتیجه مورد زیر را حاصل می کنیم:

$$s_n \left(\frac{1}{\beta} \right) = (-1)^{n+1} \frac{1 + \sqrt{\delta}}{10} \alpha^{\gamma n} + \frac{1 + \sqrt{\delta}}{10} - \frac{n}{\sqrt{\delta}}$$

(۲۶۰۱)

۲۳. اکنون مایل به بررسی رفتار $s_n(x)$ هنگامی هستیم
که x ثابت باشد و n بدون محدودیت افزایش یابد. با حد گرفتن
از n در معادله (۲۳۰۱) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left((\alpha x + \alpha^\gamma x^\gamma + \dots + \alpha^n x^n) \right. \\ &\quad \left. - (\beta x + \beta^\gamma x^\gamma + \dots + \beta^n x^n) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x + \alpha^\gamma x^\gamma + \dots + \alpha^n x^n) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta x + \beta^\gamma x^\gamma + \dots + \beta^n x^n) \end{aligned}$$

بنابراین آنچه در این مورد نیاز داریم، یافتن حدود دو
تصادد هندسی است. به عبارت دیگر، باید مجموع های دو
تصادد هندسی نامتناهی را بیابیم. برای این مقصود، این
مطلب شناخته شده را به خاطر می آوریم که یک تصاعد هندسی
نامتناهی، دارای مجموعی متناهی است؛ اگر و تنها اگر
قدر مطلق قدر نسبتش کم تر از ۱ باشد. قدر نسبت های دو
تصادد مورد بحث، به ترتیب عبارت اند از αx و βx .

از آن جا که $|\alpha| > |\beta|$ به سادگی نتیجه می گیریم که $|\alpha x| < 1$
مستلزم $|\beta x| < 1$ است. در نتیجه، نابرابری $|\alpha x| < 1$ وجود
حدود مورد نظر ما را مسلّم می کند.

به این ترتیب، حد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$$

با این شرط موجود است که:

$$|x| < 1/\alpha$$

حد مزبور را با $s(x)$ نمایش می دهیم. مقدار عملی این

