



اعداد فیوناتچی

ترجمه: غلامرضا یاسی پور



اشاره:

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم درباره رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

تنها دو جواب از آن را بیابیم که متناسب نیستند. دو جواب چنین را در میان تصاعدهای هندسی جست و جو می‌کنیم و بنا به لم ۱، می‌توانیم جست و جویمان را به تصاعدهایی محدود کنیم که جمله اولشان برابر ۱ است؛ بنابراین تصاعد هندسی:

$$1, q, q^2, \dots$$

را در نظر می‌گیریم. این تصاعد به عنوان جواب معادله (۱۳. ۱) در نظر گرفته می‌شود؛ اگر و تنها اگر:

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

به ازای هر n برقرار باشد، یا با تقسیم معادله فوق بر q^{n-2} ، اگر و تنها اگر:

$$1 + q = q^2 \quad (18. 1)$$

ریشه‌های این معادله درجه دوم، یعنی $(1 + \sqrt{5})/2$ و $(1 - \sqrt{5})/2$ قدر نسبت‌های تصاعدهای هندسی مورد جست و جو هستند. آن‌ها را به ترتیب با α و β نمایش می‌دهیم. باید تأکید کنیم که α و β ، به عنوان ریشه‌های معادله (۱۸. ۱)، در شرط‌های $1 + \alpha = \alpha^2$ ، $1 + \beta = \beta^2$ و $\alpha\beta = -1$ صدق می‌کنند.

به این طریق دو تصاعد هندسی به دست آورده‌ایم که

اکنون دنباله v ی را اختیار می‌کنیم که جواب معادله (۱۳. ۱) است. این دنباله، آن چنان که قبلاً در بخش ۲ مقدمه خاطر نشان کرده‌ایم، به گونه‌ای یکتا توسط دو جمله اول v_1 و v_2 اش تعریف شده است.

سپس دو ثابت c_1 و c_2 ای را چنان جست و جو می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_1'' &= v_1 \\ c_1 v_2 + c_2 v_2'' &= v_2 \end{aligned} \quad (17. 1)$$

به مجرد معین شدن c_1 و c_2 با استفاده از لم‌های ۱ و ۲، نتیجه می‌گیریم که $c_1 v' + c_2 v''$ برابر دنباله مفروض v است. دستگاه معادلات (۱۷. ۱) را، نظر به شرط (۱۵. ۱) برای c_1 و c_2 و بدون توجه به مقدار اعداد v_1 و v_2 ، همواره می‌توان حل کرد؛ به خصوص به دست می‌آوریم.

$$c_1 = \frac{v_1 v_2'' - v_2 v_1''}{v_1' v_2'' - v_2' v_1'}, \quad c_2 = \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_1' v_2'' - v_2' v_1'}$$

شرط (۱۵. ۱) اطمینان می‌دهد که مخرج‌های دو کسر فوق مخالف صفرند. با قرار دادن مقادیر محاسبه شده c_1 و c_2 در (۱۴. ۱) نمایش مطلوب دنباله v را به دست می‌آوریم؛ به طور خلاصه، استدلال پیشین خاطر نشان می‌کند که برای تعیین جمیع جواب‌های معادله (۱۳. ۱) کافی است که

می‌خواهیم این کار را در مورد هریک از دنباله‌های معرفی شده در بخش ۲ مقدمه انجام دهد.

۱۷. ملاحظه کردیم که:

$$\alpha^1 = \alpha + 1$$

بنابراین آشکارا نتیجه می‌شود که هر توان دیگر α با نمای صحیح و مثبت را می‌توان به صورت $a\alpha + b$ ، با ضرایب صحیح a و b بیان کرد. به این ترتیب:

$$\alpha^2 = \alpha\alpha^1 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1$$

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = 3\alpha + 2$$

و غیره.

اکنون با استفاده از استقرای نشان می‌دهیم که:

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}$$

قبلاً این گزاره را به ازای $n=2$ و $n=3$ محقق کرده‌ایم. در این صورت، فرض می‌کنیم:

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1}$$

$$\alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k$$

با جمع دو معادله اخیر، به دست می‌آوریم:

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\alpha + (u_{k-1} + u_k)$$

یا:

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1}$$

و بنابراین مرحله استقرایی نیز برقرار می‌شود و اثبات کامل است.

به گونه‌ای مشابه، از $\beta^1 = \beta + 1$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\beta^n = u_n\beta + u_{n-1}$$

۱۸. به کمک فرمول بینه، می‌توانیم مجموعه‌های گوناگونی را محاسبه کنیم که با اعداد فیبوناتچی مرتبط اند. به عنوان مثال، به محاسبه مجموع زیر می‌پردازیم:

$$u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n}$$

داریم:

$$u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^3 + \alpha^6 + \dots + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - \beta^{3n})$$

یا، پس از محاسبه مجموع‌های دو تصاعد هندسی

جواب‌های معادله‌های (۱۳. ۱) اند؛ بنابراین تمام دنباله‌ها به صورت:

$$(19. 1)$$

$$c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \dots$$

نیز جواب‌های همین معادله‌اند.

از آن‌جا که دو تصاعدی که یافته‌ایم، قدرنسبت‌های متفاوت دارند، متناسب نیستند؛ در نتیجه فرمول (۱۹. ۱)، با ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2 ، جمیع جواب‌های معادله (۱۳. ۱) را به دست می‌دهد.

در حالت خاص، فرمول (۱۹. ۱)، به ازای مقادیر مشخصی از c_1 و c_2 باید دنباله فیبوناتچی را به دست دهد. برای این کار، همان‌گونه که در بالا بیان کردیم، باید c_1 و c_2 را به عنوان جواب‌های یکتای معادله‌های:

$$c_1 + c_2 = u_1 \text{ و } c_1\alpha + c_2\beta = u_2$$

یعنی جواب‌های دستگاه معادلات

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

تعریف کنیم.

با حل این دستگاه برای c_1 و c_2 ، حاصل می‌کنیم:

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

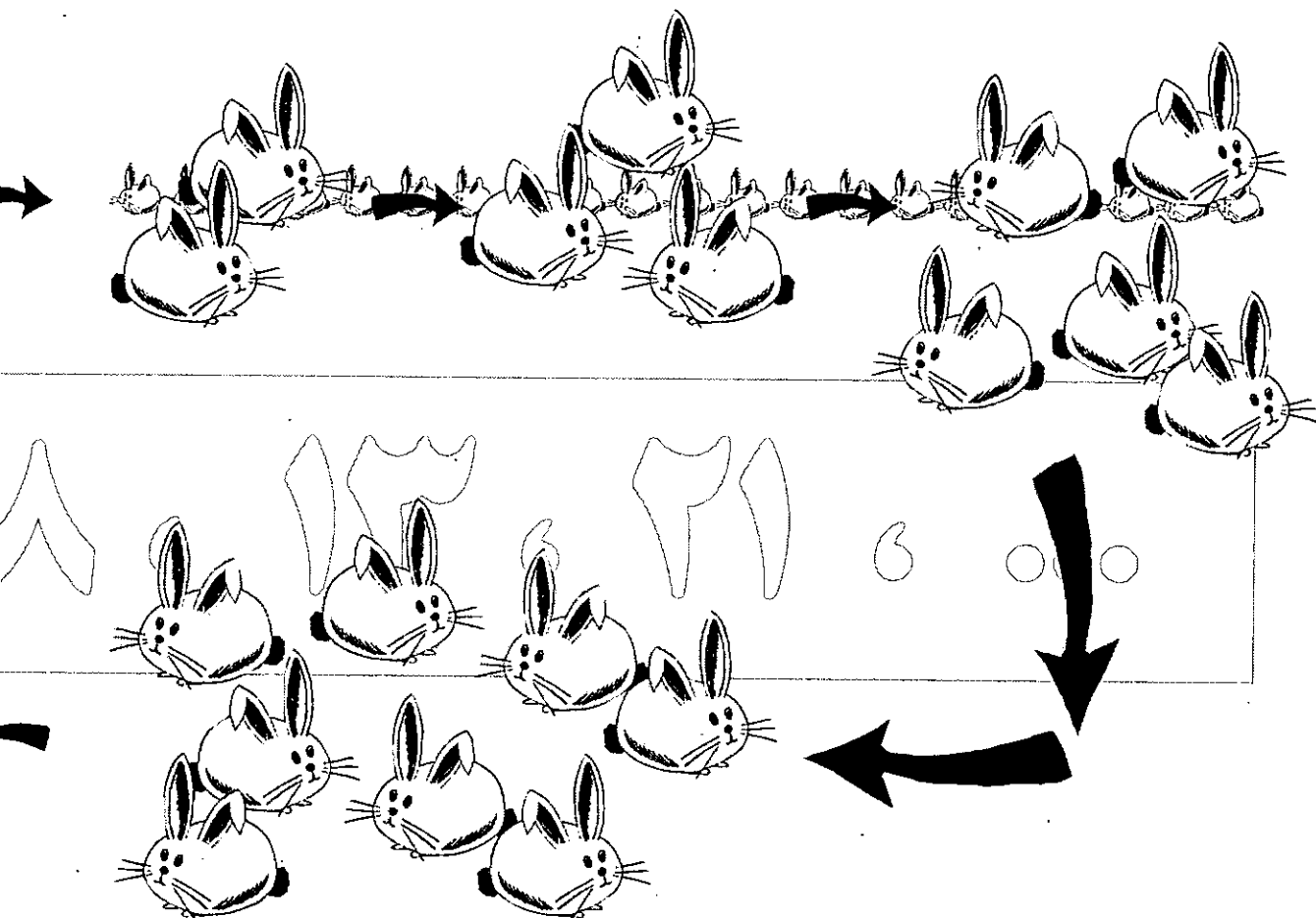
و از آن:

$$u_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

یعنی:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (20. 1)$$

فرمول (۲۰. ۱) به نام یکی از ریاضیدانان که آن را کشف کرد، به فرمول بینه «Binet's formula» موسوم است. واضح است که می‌توان فرمول‌هایی مشابه برای بعضی از جواب‌های (۱۳. ۱) استخراج کرد. از خواننده



محاسبهٔ مجموع مکعبات n عدد اولیهٔ فیبوناتچی می‌پردازیم.
ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$u_{r,k} = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{\delta}} \right)^r = \frac{1}{\delta} \frac{\alpha^{rk} - r\alpha^{rk}\beta^k + r\alpha^k\beta^{rk} - \beta^{rk}}{\sqrt{\delta}}$$

$$= \frac{1}{\delta} \left(\frac{\alpha^{rk} - \beta^{rk}}{\sqrt{\delta}} - r\alpha^k\beta^k \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{\delta}} \right) = \frac{1}{\delta} (u_{rk} - (-1)^k r u_k)$$

$$= \frac{1}{\delta} (u_{rk} + (-1)^{k+1} r u_k)$$

بنابراین:

$$u_1^r + u_2^r + \dots + u_n^r = \frac{1}{\delta} ((u_r + u_2 + \dots + u_{rn}) +$$

$$+ 3(u_1 - u_r + u_2 - \dots + (-1)^{n+1} u_n))$$

یا با استفاده از فرمول (۶.۱) و نتیجهٔ بخش پیشین:

$$u_1^r + u_2^r + \dots + u_n^r = \frac{1}{\delta} \left(\frac{u_{rn+r} - 1}{r} + (-1)^{n+1} 3u_{n-1} + 3 \right)$$

$$= \frac{u_{rn+r} + (-1)^{n+1} 6u_{n-1} + 5}{10}$$

۲۰. اکنون موقع مناسب طرح این پرسش است که: سرعت

رشد اعداد فیبوناتچی با افزایش اندیس‌های آن‌ها چیست؟

مشمول در معادلهٔ پیشین:

$$u_r + u_2 + \dots + u_{rn} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\alpha^{rn+r} - \alpha^r}{\alpha^r - 1} - \frac{\beta^{rn+r} - \beta^r}{\beta^r - 1} \right)$$

اما:

$$\alpha^r - 1 = \alpha + \alpha^r - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha$$

و، مشابهاً:

$$\beta^r - 1 = 2\beta$$

بنابراین:

$$u_r + u_2 + \dots + u_{rn} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\alpha^{rn+r} - \alpha^r}{2\alpha} - \frac{\beta^{rn+r} - \beta^r}{2\beta} \right)$$

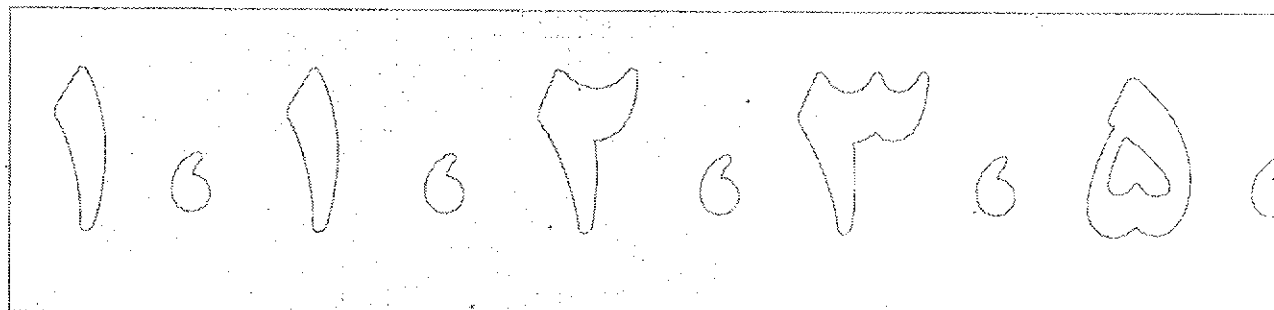
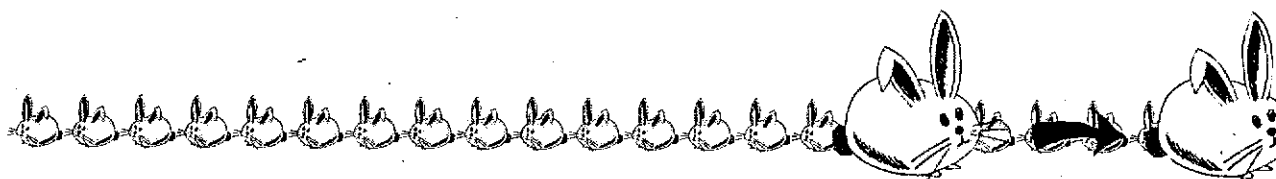
یا، بعد از مقداری حذف:

$$u_r + u_2 + \dots + u_{rn} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\frac{\alpha^{rn+r} - \alpha^r - \beta^{rn+r} + \beta^r}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^{rn+r} - \beta^{rn+r}}{\sqrt{\delta}} - \frac{\alpha^r - \beta^r}{\sqrt{\delta}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (u_{rn+r} - u_r) = \frac{u_{rn+r} - 1}{2}$$

۱۹. اکنون به عنوان مثال دیگری از کاربرد فرمول بینه، به



امکان پذیر است.

به عنوان نمونه، u_{14} ، پاسخ مسأله خرگوش های فیوناتچی را محاسبه می کنیم. برای این کار، توجه می کنیم که:

$$\sqrt{5} = 2.2361, \log \sqrt{5} = 0.34949$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180, \log \alpha = 0.20898$$

$$\log \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \times 0.20898 - 0.34949 = 2.5762$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376.9$$

نزدیک ترین عدد صحیح به ۳۷۶.۹ عدد ۳۷۷ است؛

$$u_{14} = 377$$

روش مطرح شده در بالا، به زودی در مورد عددهای فیوناتچی با اندیس های بزرگ، از کارایی می افتد؛ یعنی، دیگر نمی توانیم جمیع ارقام چنین عددی را با تکیه بر ماشین حساب محاسبه کنیم و تمام کاری که در این مورد می توانیم انجام دهیم، تعیین چند رقم اولیه است. بنابراین آشکار می شود که چنین محاسباتی تقریبی اند.

به عنوان تمرین، شما می توانید ثابت کنید که در دستگاه

دهمی، u_n ، یعنی n امین عدد فیوناتچی، به ازای $n \geq 17$ ،

بیش تر از $n/4$ و کم تر از $n/5$ رقم ندارد. با این همه،

پرسشی دیگر: $u_1, \dots$ دارای چند رقم است؟

فرمول بیته به قدر کافی پاسخ کاملی به این پرسش می دهد. در این مورد می توان قضیه زیر را به سادگی به اثبات رساند.

قضیه. n امین عدد فیوناتچی، یعنی u_n ، نزدیک ترین عدد صحیح به $\alpha^n / \sqrt{5}$ ، یعنی a_n ، جمله n ام تصاعد هندسی ای است که جمله اول آن $\alpha / \sqrt{5}$ و قدر نسبت آن برابر الف است.

اثبات. واضح است که در این مورد باید محقق کنیم که قدر مطلق تفاوت بین u_n و a_n ، به ازای هر n ، کم تر از $1/2$ است. برای این مقصود، ابتدا توجه می کنیم که:

$$|u_n - a_n| = \left| \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

گذشته از این، به خاطر می آوریم که $\beta = -0.618000$ ؛ بنابراین $|\beta| < 1$ ، در این صورت، به ازای هر n

$$|\beta|^n < 1$$

و از آنجا که $\sqrt{5} > 2$.

$$|\beta|^n / \sqrt{5} < 1/2.$$

به این ترتیب، قضیه به اثبات می رسد. خواننده آشنا با نظریه حدود، می تواند با دستکاری مختصری در اثبات این قضیه، ثابت کند که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - a_n| = 0$$

در این صورت، با استفاده از قضیه هم اکنون به اثبات رسیده، محاسبه اعداد فیوناتچی با کمک ماشین حساب