



مقالات کوتاه از

مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۸)

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

قسمت چهارم

کرد. این نتیجه در بخش هفتم و آخرین اثر عظیمش^۲ - در چاپ امروزی کتابی - آمده است که در ۱۸۰۱ زمانی که گاوس هنوز تنها بیست و چهار سال داشت ظاهر شد، و مبنای اغلب نظریه اعداد امروزه (شاخه‌ای از ریاضیات که با ویژگیهای اعداد طبیعی سرو کار دارد، و مطالب این فصل جزئی کوچک از آن است) قرار گرفت.

یکی از مسایل مورد علاقه ریاضیدانهای یونان باستان ترسیم شکلهای مسطح (دایره‌ها، مثلثها، متوازی الاضلاعها، و غیره) تنها با استفاده از خط کش (نامدرج، و بنابراین تنها مناسب برای رسم خطوط مستقیم) و پرگار (تنها برای رسم کمانهای دایره‌ها، و انتقال یک طول با حرکت دادن آن در عرض صفحه) بود. با بهره گرفتن از ابتکارهایی غالباً جالب می توان تعداد بسیاری از شکلهای هندسی را تنها با استفاده از این دو وسیله ابتدائی رسم کرد. (چنین ترسیماتی پیش از اواسط دهه ۱۹۶۰ بخش مهمی از ریاضیات شاگردان دبیرستان را تشکیل می داد.) یونانیان خود چگونگی ترسیم n ضلعیهای منتظم را به ازای

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16$$

یک ذهن ریاضی حیرت انگیز

کارل فردریش گاوس در ۱۷۷۷ در برونسویک^۱، که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنا بود و امید داشت که پسرش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در سه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناسب آن است. خوشبختانه از لحاظ آینده ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوئیم) درک حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردسال آگاه شد و تعلیم مرتب او را برقرار ساخت.

گاوس در سن پانزده سالگی، در حالی که بسیار جلوتر از تواناییهای معلمان خود بود، به کالج کارولین^۲ رفت. طی سه سال استادان این کالج مجبور به پذیرفتن این مطلب شدند که آنها را نیز پشت سر نهاده است.

گاوس در ۱۷۹۶، هنگامی که دانشجوی کالج بود، مطلب قابل توجه خود را در ارتباط با هندسه یونانی و اعداد فرما مطرح

Arithmeticae خود در قرن اول میلادی فهرست چهار عدد تام شناخته شده (بعد از ۶ و ۲۸) را به صورت ۴۹۶، و بعد از آن ۸۱۲۸ آورده است. پس از این سند دو حدس زیر زده شد: n : امین عدد تام دارای n رقم است، و اعداد تام متوالیاً به ۶ و ۸ ختم می‌شوند. اما هر دو حدس غلط بودند. مثلاً اعداد تام پنج رقمی وجود ندارند، و گذشته از این، گرچه پنجمین عدد تام یعنی، ۳۳۵۵۰۳۳۶، به ۶ ختم می‌شود، ششمین عدد تام که ۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶ است، نیز چنین است. (اما این مطلب که هر عدد تام به ۶ یا ۸ ختم می‌شود راست است. این موضوع می‌تواند مستقیماً به اثبات رسد، و به این مطلب که در واقع کدام اعداد تام اند بستگی ندارد.)

اقلیدس در کتاب XI مقدمات^۸ اش، در حدود ۳۵۰ – ۳۰۰ ق.م. ثابت کرد اگر $2^n - 1$ اول باشد، عدد $(2^n - 1)2^{n-1}$ تام است. دو هزار سال بعد، اوایلر نشان داد هر عدد تام زوج از این نوع است، و به این ترتیب رابطه‌ای نزدیک بین اولهای مرسن و اعداد تام مشخص شد، که بلافاصله دلالت بر این می‌کند که در حال حاضر دقیقاً سی عدد تام زوج شناخته شده موجودند. در واقع اعداد تام فردی شناخته نشده‌اند، و حدس زده‌اند که جمیع عددهای تام ضرورتاً زوج‌اند. اگر این حدس به اثبات نرسیده مدارکی چند به سود آن جمع آورده شده است. مشخص شده است هر عدد تام فرد، در صورت وجود، باید بزرگتر از 10^{10} و دست کم ۱۱ عامل اول متمایز داشته باشد. از طرف دیگر، شخص، در صورتی که تاریخ را در این مورد راهنما به حساب آوریم، باید در مورد حدس زدن دربارهٔ اعداد تام محتاط باشد. پیتربارلو^۹ در ۱۸۱۱ در کتاب *Theory of Numbers* اش از $(2^{31} - 1)2^{30}$ ، هشتمین عدد تام، عددی ۱۹ رقمی، که در ۱۷۷۲ توسط اوایلر کشف شده بود چنین نوشت: «این عدد بزرگترین عددی است که در زمانه کشف خواهد شد؛ زیرا از آنجا که این اعداد بی‌آنکه سودمند باشند صرفاً شگفت‌انگیزند، احتمال نمی‌رود کسی دیگر سعی در یافتن عددی بعد از آن بکند.»

هر چند به نظر می‌رسد بارلو در مورد صرفاً شگفت‌انگیز بودن اعداد تام حق داشته باشد، وی آشکارا جذابیت شگفتیها

می‌دانستند. (چندضلعی منتظم^{۱۰} است اگر جمیع اضلاعش دارای یک طول و جمیع زاویه‌های داخلی برابر باشند.)

آنچه که گاوس نوزده ساله اثبات کرد این بود که یک چندضلعی منتظم با n ضلع را می‌توان تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کرد اگر و تنها اگر، $n = 2^k$ به ازای عدد k ای یا

$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_r \quad (\text{به‌ازای } k \text{ ای})$$

که در آن $P_1, P_2, \dots, P_r$ اولهای فرمای متمایزند. در حالت خاص، به ازای هر اول فرمای P می‌توانیم چندضلعی منتظمی با P ضلع رسم کنیم. به‌ازای اولین اول فرما، $F_2 = 3$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم، که رسمش آسان است، و به ازای بعدی، $F_4 = 5$ پنج ضلعی منتظم را حاصل می‌کنیم. از آنجا که $F_7 = 17$ نیز اول فرماست، دستاورد گاوس نشان می‌دهد که ۱۷ ضلعی منتظم را نیز می‌توان با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کرد. این دستاورد اولین (و تنها) پیشرفت در مورد رسم چندضلعیهای منتظم از زمان خود یونانیها بود، و گاوس از کشفش بقدری سرافراز گردید که بر این شد که بر سنگ قبرش یک ۱۷ ضلعی منتظم نقشه کنند. گرچه این تقاضا هیچگاه به انجام نرسید، اما چنین چندضلعی‌ای بر گوشه‌ای از یادمانی که به یاد وی در مولدش، برونسویک، بنا شد، نقش شده است.

اعداد تام

عدد ۶، همان‌گونه که فیثاغورسیان (پیروان فیثاغورس^۵، ریاضیدان قرن ششم ق.م.) توجه کرده بودند، ویژگی نسبتاً مخصوصی دارد. این عدد برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های خود (غیر از خودش) است:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

عدد بعد از ۶، دارای این ویژگی، ۲۸ است. تنها اعداد شمارندهٔ ۲۸ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴، و خود ۲۸، و

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

فیثاغورسیان این عددها را اعداد تام^۶ می‌نامیدند.

نیکوماخوس^۷ ریاضیدان یونانی در Introduction

۷۰۹۰ IBM، ۴۹ دقیقه بر ILIAC-II، ۳۰۱ دقیقه بر
۳۶۰-۹۱ IBM، و ۱۰ ثانیه بر CRAY-۱.

□ یادداشتهای

- 1- Brunswick
- 2- Caroline College
- 3- Disquisitiones Arithmeticae
- 4- regular
- 5- Pythagoras
- 6- Perfect numbers
- 7- Nicomachus
- 8- Elements
- 9- Peter Barlow
- 10- triangular
- 11- digital root

را، آن گونه که بخش اول این فصل به کفایت توضیح می دهد، دست کم گرفته است. و شک نیست که اعداد تام بسیار شگفت انگیزند. به عنوان نمونه، هر عدد تام (زوج) مثلثی است؛ که بدین معنی است که آن را می توان توسط تعدادی مهره نمایش داد که برای ساختن مثلثی متساوی الاضلاع مرتب شده اند (که هم ارز به صورت $\frac{1}{2}n(n+1)$ بودن، به ازای عدد n ی، است). واقعیت دیگر: اگر عدد تام غیر از ۶ ی را در نظر گرفته تمام ارقامش را با هم جمع کنیم، عددی که به دست می آوریم یکی بیش از مضربی از ۹ خواهد بود. مرتبط با این مطلب این دستاورد است که ریشهٔ رقمی "هر عدد تام ۱ است. (برای به دست آوردن ریشهٔ رقمی یک عدد جمیع ارقام آن عدد را جمع کرده، سپس جمیع ارقام عدد حاصل را جمع می کنیم و ادامه می دهیم تا به یک عدد تک رقمی برسیم.)

باز هم، هر عدد تام مجموع مکعبات فرد متوالی است. به عنوان نمونه:

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

باز هم: اگر n تام باشد، مجموع معکوسهای جمیع مقسوم علیه های n همواره برابر ۲ است. به عنوان نمونه، ۶ دارای مقسوم علیه های ۱، ۲، ۳، ۶ است، و

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

در واقع، در جستجوی این اعداد «شگفت» که، علی رغم ادعای بارلو در مورد بی فایده بودنشان، محاسبه آنها شأن قضاوت در مورد اندازه گرفتن توان کامپیوترها را به دست آورده، کوشش بسیار به کار رفته است. به عنوان نمونه، عدد مرسن M_{8191} ، اولین عدد در گسستن زنجیرهٔ اولهای مرسن منجر شونده به اولهای مرسن، را در نظر می گیریم (پیشین را ملاحظه کنید). با استفاده از آزمون لوکاس - لمر اثبات این که این عدد ۲۴۶۶ رقمی اول نیست (و در نتیجه عددی تام را به دست نمی دهد)، زمانی که اولین بار بر کامپیوتر ILIAC-I در ۱۹۵۳ انجام شد، ۱۰۰ ساعت زمان گرفت. طی سالیان زمان محاسبهٔ آن به گونهٔ چشمگیری کم شد: ۵۰۲ ساعت بر

