



اصل لانه کبوتری

اشاره

یوهان پتر گوستاف لوزون دیریکله^۱ در ۱۳ فوریه سال ۱۸۰۵ میلادی در شهر دورن^۲ آلمان متولد شد و به ترتیب در برلین و برسلاو^۲ سمت استادی داشت. او از شاگردان بااستعداد گاوس بود که با مرگ گاوس در سال ۱۸۵۵ به عنوان جانشین وی در دانشگاه گوتینگن^۳ منصوب شد که نشانه‌ای از شایستگی‌های او است. زمانی که او در گوتینگن بود، امید داشت آثار ناتمام گاوس را به پایان برساند، ولی مرگ زود هنگام او در سال ۱۸۵۹ مانع از آن شد. دلیل شهرت دیریکله در ریاضیات، تحقیقات مهم او در سری‌های فوریه و نظریه‌ی اعداد است. او در سال ۱۸۳۴ اصل «کشوی دیریکله» یا همان اصل «لانه کبوتری» را بیان کرد. این اصل بسیار ساده، کاربردهای فراوانی برای حل مسائل مربوط به مجموعه‌های متناهی در نظریه‌ی اعداد، ترکیبات و هندسه دارد، در ادامه، به بیان این اصل می‌پردازیم و کاربرد آن را با ارائه‌ی مسائل گوناگون بررسی می‌کنیم.

اصل لانه کبوتری

فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم: $m < n$. اگر n شی را در m خانه قرار دهیم (به هر صورت، اعم از این که خانه‌ای خالی بماند یا نماند)، آن گاه حداقل یکی از این خانه‌ها شامل دو شی یا بیش‌تر خواهد بود.

اکنون اگر n را تعداد کبوترها و m را تعداد لانه‌ها تصور کنیم، اصل لانه کبوتری را خواهیم داشت.

با استفاده از این اصل ساده و بدیهی، می‌توان در مواقع حساس، مسائل مهم و مشکل را حل کرد. در واقع، بدون استفاده از این اصل، اثبات چنین مسائلی، کاری بسیار دشوار خواهد بود.

مثال ۱: A یک زیرمجموعه‌ی V عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای A را بر ۶ تقسیم کنیم، ثابت کنید که حداقل دو عضو از این مجموعه، دارای باقی‌مانده‌ی یکسان‌اند.

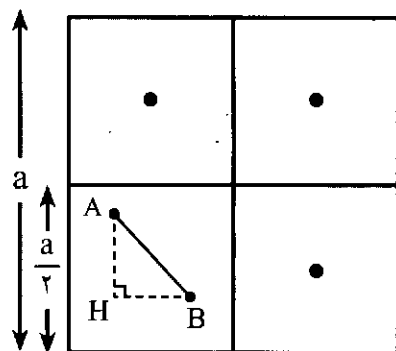
حل: اگر هر یک از اعضای مجموعه‌ی A را بر ۶ تقسیم کنیم، آن گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم، یکی از عددهای مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ است. حال اگر ۶ لانه به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline r=0 & r=1 & r=2 & r=3 & r=4 & r=5 \\ \hline \end{array}$$

و اعضای مجموعه‌ی A را به عنوان ۷ کبوتر تصور کنیم، اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، آن گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر است، یعنی حداقل دو عدد یافت می‌شوند که پس از تقسیم بر ۶، هم باقی‌مانده هستند.

مثال ۲: ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع a مفروض‌اند. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این ۵ نقطه، کم‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ است.

حل: ابتدا مربع را به چهار مربع برابر تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)، سپس هر یک از آن‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:



(شکل ۱)

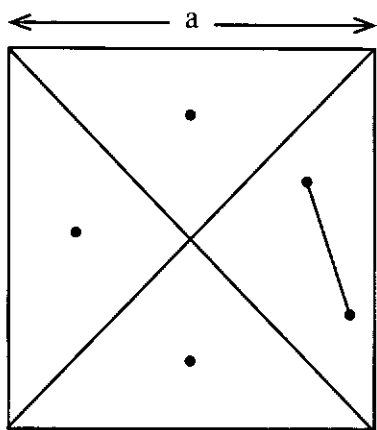
$$\begin{cases} AH < \frac{a}{2} \Rightarrow AH^2 < \frac{a^2}{4} \\ BH < \frac{a}{2} \Rightarrow BH^2 < \frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

در مثلث $\triangle ABH$ ، طبق قضیه‌ی فیثاغورس، داریم

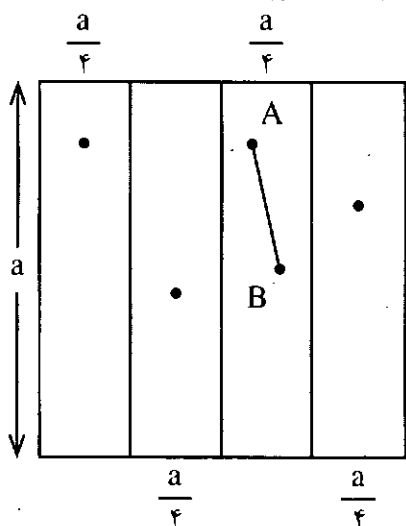
$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AH^2 + BH^2 < \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AB^2 < \frac{a^2}{2} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا مربع به ضلع a را به این صورت تقسیم‌بندی کردیم، و چرا این مربع را به صورت شکل‌های زیر تقسیم‌بندی نکردیم؟



(الف)



(ب)

پاسخ آن است که در حل یک مسئله، انتخاب روش‌های مجاز و منطقی با توجه به اصول و فرض‌های مسئله با ما است و هر راهی که به نظرمان می‌رسد، می‌توانیم انتخاب کنیم، اما با تقسیم‌بندی مانند شکل الف به حکم مسئله نمی‌رسیم. بدیهی است که با استفاده



از اصل لانه کبوتری، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر داخل یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل الف قرار خواهند داشت ولی در این صورت فاصله‌ی حداقل ۲ نقطه کمتر از عدد a می‌شود.

چون در مثلث قائم‌الزاویه فاصله‌ی بین هر دو نقطه از وتر کوچک‌تر است، پس $AB < a$ یعنی حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از a است و این نتیجه نیز صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

در تقسیم‌بندی شکل ب به این نتیجه می‌رسیم که حداقل ۲ نقطه یا بیش‌تر یافت می‌شوند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از قطر مستطیل است. یعنی $AB < \frac{\sqrt{15}}{4}a$ و این نیز نتیجه‌ای صحیح است ولی معادل با حکم مثال ۲ نیست.

اگر سؤال این باشد که از کجا فهمیدیم باید مربع را به صورت شکل ۱ تقسیم‌بندی کنیم تا به حکم مسئله برسیم، در جواب می‌توان گفت که این بستگی به تجربه، خلاقیت و ابتکار فراوان در زمینه‌ی حل مسائل اصل لانه کبوتری دارد.

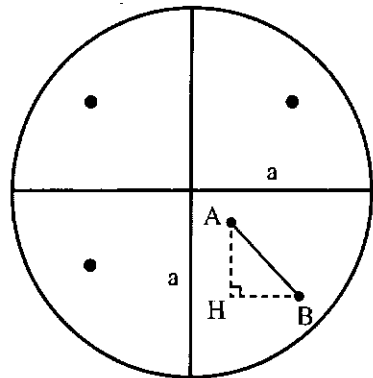
پرسش ۱: اگر ۵ نقطه را داخل مربعی به ضلع ۱۰ در نظر بگیریم، آن‌گاه حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عدد‌های زیر است؛ آن عدد کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۳) $10\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است، زیرا طبق مسئله‌ی قبل، با فرض $a=10$ داریم:

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a, a=10 \Rightarrow AB < 5\sqrt{2}$$

مثال ۳: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به شعاع a در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از $a\sqrt{2}$ است.



حل: ابتدا دو قطر عمود برهم رسم می‌کنیم و دایره را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم، سپس هر یک از این قسمت‌ها را به عنوان یک لانه تصور می‌کنیم. اکنون اگر ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر بگیریم که می‌خواهند لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن دو یا بیش‌تر کبوتر قرار دارند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AH < a \Rightarrow AH^2 < a^2 \\ BH < a \Rightarrow BH^2 < a^2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 2a^2 \Rightarrow AB^2 < 2a^2 \Rightarrow AB < a\sqrt{2}$$

پرسش ۲: ۵ نقطه را داخل دایره‌ای به قطر ۸ در نظر می‌گیریم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از یکی از عدد‌های زیر است، آن عدد کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $8\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است، زیرا شعاع دایره ۴ است و طبق مسئله‌ی قبل داریم:

$$AB < a\sqrt{2} \text{ و } a=4 \Rightarrow AB < 4\sqrt{2}$$

مثال ۴: داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حداقل دارای دو مهره‌ی هم‌رنگ است.

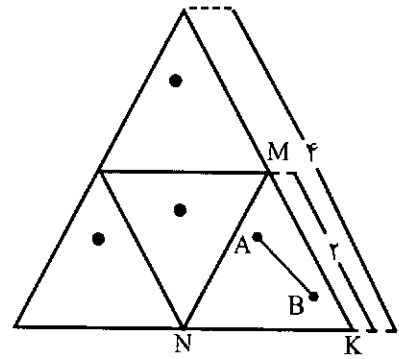
حل: طبق جدول ذیل، می‌توان مهره‌ها را داخل دو جعبه قرار داد. در صورتی که از مرحله‌ی اول تا مرحله‌ی سوم از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی دوم استفاده کنیم و از مرحله‌ی چهارم تا مرحله‌ی آخر از اصل لانه کبوتری برای جعبه‌ی اول استفاده کنیم، حکم مسئله برقرار است.

در هر مرحله، سه رنگ را به عنوان ۳ لانه و تعداد مهره‌ها را به عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. برای مرحله‌ی اول، ۳ لانه و ۶ کبوتر در جعبه‌ی دوم داریم. اکنون اگر کبوترها داخل لانه‌ها قرار گیرند، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، بیش از یک کبوتر است؛ یعنی در جعبه‌ی دوم، حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد.

مرحله	جعبه‌ی اول	جعبه‌ی دوم
۱	۱	۶
۲	۲	۵
۳	۳	۴
۴	۴	۳
۵	۵	۲
۶	۶	۱

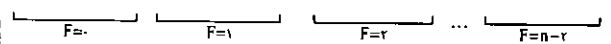
مثال ۵: ۵ نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ در نظر بگیرید. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه، کم‌تر از ۲ است.

حل: ابتدا مثلث را مانند شکل زیر به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هر قسمت را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم. اگر ۵ نقطه را به عنوان ۵ کیوتر تصور کنیم که لانه‌ها را اشغال می‌کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کیوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که در آن، دو یا بیش‌تر کیوتر قرار دارد. فرض کنیم دو نقطه‌ی A و B داخل مثلث ΔMNK قرار داشته باشد. چون در مثلث متساوی الاضلاع، فاصله‌ی بین هر دو نقطه کم‌تر از طول ضلع این مثلث است، پس $AB < 2$.



مثال ۶: اگر در یک مهمانی n نفر حضور داشته باشند، ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها باهم برابر است (اگر A با B دوست باشد، B هم با A دوست است).

حل: کسی که کم‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر صفر است و کسی که بیش‌ترین دوست را دارد، تعداد دوستانش برابر $n-2$ است (زیرا او به‌جز خودش و کسی که دوست ندارد، با بقیه دوست است)؛ بنابراین، تعداد دوستان یک شخص، می‌تواند یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, n-2$ باشد. اگر لانه‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیریم: (F: به‌منظور تعداد دوست است).



ملاحظه می‌کنیم که $n-1$ لانه و n کیوتر داریم. پس طبق اصل لانه‌ی کیوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که با دو یا بیش‌تر کیوتر اشغال می‌شود، یعنی دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها باهم برابر است.

مثال ۷: ثابت کنید که هر مجموعه‌ی n عضوی از اعداد طبیعی مانند A، حداقل دارای یک زیرمجموعه است که حاصل جمع اعضای آن بر n بخش‌پذیر است.

اثبات با برهان خلف: اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، در این صورت فرض می‌کنیم هیچ‌یک از 2^n زیرمجموعه‌ی A دارای خاصیت فوق نباشند، یعنی حاصل جمع اعضایشان بر n بخش‌پذیر نباشد، به‌ویژه

هر یک از مجموعه‌های:

$$A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_1, a_2\}, A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشان مضرب n نیست. پس اعداد زیر هیچ‌یک بر n بخش‌پذیر نیستند:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

از طرفی می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم این n عدد طبیعی بر n یکی از اعداد ۱ تا $n-1$ است (صفر جزء باقی‌مانده‌ها نیست، زیرا بر n بخش‌پذیر نیست). لذا چون n عدد موجود است و $n-1$ باقی‌مانده داریم (از ۱ تا $n-1$) طبق اصل لانه‌ی کیوتری، لاقلاً ۲ عدد از این n عدد باقی‌مانده‌ی تقسیمشان بر n باهم برابر می‌شود. فرض می‌کنیم S_i و S_j در تقسیم بر n هم باقی‌مانده باشند که $i > j$ پس:

$$S_j - S_i = kn, S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$$

و واضح است که $a_{i+1}, \dots, a_j$ اعضای A هستند و اگر قرار دهیم $B = \{a_{i+1}, \dots, a_j\}$ همواره $B \subset A$ و دیدیم که مجموع اعضای B مضرب n است و این با فرض خلف تناقض دارد. پس حکم ثابت می‌شود.

پرسش ۳: ۵ نقطه‌ی متمایز از محیط دایره‌ی مثلثاتی مفروض‌اند. در این صورت کدام درست است؟

(۱) حداقل دو نقطه، دارای نسبت‌های مثلثاتی برابر هستند.

(ب) حداقل دو نقطه، تانژانت‌های برابر دارند.

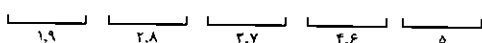
(۳) حداقل دو نقطه، سینوس‌های برابر دارند.

(۴) حداقل دو نقطه، نسبت‌های مثلثاتی هم‌علامت دارند.

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا اگر هر ربع دایره‌ی مثلثاتی را یک لانه در نظر بگیریم و هر یک از آن ۵ نقطه را کیوتر فرض کنیم، چون تعداد کیوترها از لانه‌ها بیش‌تر است، طبق اصل لانه‌ی کیوتری، حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه در یک ربع دایره واقع می‌شوند. بنابراین، نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها هم‌علامت خواهد بود.

مثال: نشان دهید که هر زیرمجموعه‌ی شش عضوی از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حل: هر لانه را برای دو عددی از مجموعه‌ی S در نظر می‌گیریم که مجموعشان برابر با ۱۰ است. بنابراین داریم:



ملاحظه می‌کنیم که تعداد لانه‌ها ۵ تا است. هرگاه ۶ عضو زیرمجموعه‌ای از S را به‌عنوان ۶ کیوتر در نظر بگیریم و قرار باشد که کیوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کیوتری، لانه‌ای باید باشد که در آن حداقل دو کیوتر قرار گیرد، پس در آن

لانه دو عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۱۰ است.

تعمیم یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری

تا این جا معمولاً با مسائلی روبه‌رو شدیم که در آن‌ها تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از تعداد لانه‌ها بود، یعنی k لانه و $k+1$ کبوتر داشتیم که طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل در یکی از لانه‌ها دو کبوتر یا بیش‌تر قرار دارد.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، آن‌گاه نتیجه بیش از این است که «حداقل دو کبوتر یا بیش‌تر در یکی از لانه‌ها وجود دارد». برای مثال، فرض کنید ۳ لانه و ۱۰ کبوتر داریم. اگر قرار باشد کبوترها را اشغال کنند، درحالتی که کبوترها در تمام لانه‌ها پخش باشند، به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که وقتی ۹ کبوتر لانه‌ها را اشغال کرده باشند، در هر لانه ۳ کبوتر قرار دارد. چنان‌چه کبوتر دهم در هر لانه قرار بگیرد، حداقل در یکی از لانه‌ها ۴ کبوتر یا بیش‌تر قرار خواهند داشت و این تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری است.

$$\begin{array}{ccc} \times \times \times & \times \times \times \times & \times \times \times \end{array}$$

می‌توان تعمیم‌یافته‌ی اصل لانه‌ی کبوتری را به این صورت بیان کرد:

هرگاه m کبوتر وارد n لانه شوند ($m > n$)، آن‌گاه حداقل $\left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

مثال ۹: در کلاسی ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور دارند. ثابت کنید که حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به دنیا آمده‌اند.

حل: ۱۲ ماه سال را به عنوان $n=12$ لانه و $m=25$ را تعداد کبوترها در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{25-1}{12} \right\rceil + 1 = 3$$

بنابراین حداقل ۳ نفر آن‌ها در یک ماه از سال به دنیا آمده‌اند.

مثال ۱۰: ۲۶ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه با ۷ خودرو به سمت منزلشان حرکت می‌کنند. ثابت کنید که در هر خودرو حداقل ۴ نفر دانش‌آموز قرار دارند.

حل: ۷ خودرو را به عنوان $n=7$ لانه و $m=26$ نفر را به عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{26-1}{7} \right\rceil + 1 = 4$$

بنابراین، حداقل ۴ دانش‌آموز در یک خودرو قرار دارند.

مثال ۱۱: در کشوی کمد لباس‌ها چند جفت جوراب قرمز، آبی و

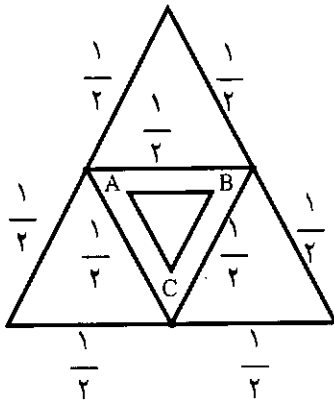
سفید وجود دارد. چند لنگه جوراب (بدون آن‌که به رنگ آن‌ها نگاه کنیم) باید از کشو بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل ۳ جفت جوراب یک‌رنگ برداشته‌ایم؟

حل: هر رنگ را به عنوان یک لانه در نظر می‌گیریم، در این صورت $n=3$. از طرفی می‌خواهیم حداقل در یک لانه ۳ جفت جوراب هم‌رنگ یا ۶ لنگه جوراب هم‌رنگ داشته باشیم. بنابراین داریم:

$$\left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil + 1 = 6 \text{ و } n=3 \Rightarrow \left\lceil \frac{m-1}{3} \right\rceil = 5$$

$$\Rightarrow 5 \leq \frac{m-1}{3} < 6 \Rightarrow 15 \leq m-1 < 18 \Rightarrow 16 \leq m < 19$$

در نتیجه، حداقل باید ۱۶ لنگه جوراب از کشو برداریم. مثال ۱۲: در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید سه تا از این نقاط، رؤوس مثلثی با محیط کم‌تر از $1/5$ واحد هستند.



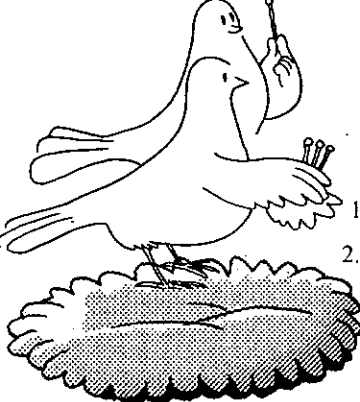
حل: مطابق شکل، مثلث را به چهار لانه تفکیک می‌کنیم.

چنان‌چه ۱۰ نقطه، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه در یک لانه حداقل $\left\lceil \frac{10-1}{4} \right\rceil + 1 = 3$ نقطه وجود دارد. چنان‌چه این سه نقطه را به هم وصل کنیم، مثلث ABC به وجود می‌آید که طول هریک از اضلاع آن کوچک‌تر از $1/4$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AB < \frac{1}{4} \\ AC < \frac{1}{4} \Rightarrow AB + AC + BC < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow P = AB + AC + BC < 1/5 \\ BC < \frac{1}{4} \end{cases}$$

مثال ۱۳: هرگاه S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، چنان‌چه اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، ثابت کنید حداقل ۴ عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان هستند.

حل: در صورتی که هر عدد طبیعی را بر ۲۰ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲۰ یکی از عددهای زیر خواهند بود.



پی‌نوشت

1. Peter Gustav Lejeune Dirichle
2. Dürer
3. Breslau
4. Göttingen

۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ خواهد بود.

چنانچه این باقی مانده‌ها را، که تعدادشان $n=20$ است، به عنوان لانه‌ها و $m=70$ را تعداد کبوترها در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{70-1}{20} \right\rfloor + 1 = 4$$

در نتیجه، حداقل ۴ عدد در تقسیم بر ۲۰، باقی مانده‌های یکسان دارند.

مثال ۱۴: هفده نفر با نام‌های حمزه، محمود، حسن و رضا و نام‌های خانوادگی مشیری، احمدی، بصیری و ابوالحسنی در جلسه‌ای حاضر شدند. نشان دهید که حداقل ۲ نفر وجود دارند که نام و نام خانوادگی آن‌ها باهم یکسان است.

راه حل اول: چنانچه ۱۷ نفر را به عنوان ۱۷ کبوتر و ۴ خانه با نام‌های زیر را به عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

xxxx	xxxx	xxxxx	xxxx
رضا	حسن	محمود	حمزه

$$m=17 \text{ و } n=4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{17-1}{4} \right\rfloor + 1 = 5$$

در نتیجه حداقل ۵ نفر وجود دارند که نام‌های آن‌ها یکسان است. اکنون چنانچه ۴ خانه با عنوان‌های زیر را به عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم و قرار باشد حداقل ۵ نفر بالا آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری داریم:

x	xx	x	x
ابوالحسنی	بصیری	احمدی	مشیری

در نتیجه حداقل ۲ نفر یافت می‌شوند که یک خانه را پر کنند، یعنی حداقل دو نفر که نام‌های یکسان دارند، نام خانوادگی آن‌ها نیز یکسان خواهد شد.

راه حل دوم: می‌توان از ابتدا، ۱۶ لانه با عنوان‌های زیر در نظر گرفت، چنانچه ۱۷ نفر به عنوان ۱۷ کبوتر، بخواهند آن‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد داشت.

x	x	x	x
حمزه مشیری	حمزه احمدی	حمزه بصیری	حمزه ابوالحسنی
x	x	x	x
محمود مشیری	محمود احمدی	محمود بصیری	محمود ابوالحسنی
x	xx	x	x
حسن مشیری	حسن احمدی	حسن بصیری	حسن ابوالحسنی
x	x	x	x
رضا مشیری	رضا احمدی	رضا بصیری	رضا ابوالحسنی

ادامه‌ی مطلب صفحه‌ی ۹

چند وادیکال مسلسل

$$2 + \sqrt{2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2^{\frac{2}{2}}\sqrt{2} + 2^{\frac{2}{2}}\sqrt{2} + 2^{\frac{5}{2}}\sqrt{2} + \dots},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2^{\frac{2}{2}}\sqrt{2} + 2^{\frac{2}{2}}\sqrt{2} + 2^{\frac{5}{2}}\sqrt{2} + \dots},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \dots}}}}},$$

$$\frac{5}{4} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{1}{8}\sqrt{1 + \frac{1}{16}\sqrt{1 + \dots}}}}},$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{2}\sqrt{8 + \frac{1}{4}\sqrt{16 + \frac{1}{2}\sqrt{32 + \dots}}}}},$$

$$\frac{33}{256} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{256}\sqrt{\frac{1}{256} + \dots}}}},$$

$$2 = \sqrt{4 + \sqrt{4^2} + \sqrt{4^2} + \sqrt{4^2} + \sqrt{4^2} + \dots},$$

$$24 = 2\sqrt{16 + 2^2\sqrt{16^2} + 2^2\sqrt{16^2} + 2^2\sqrt{16^2} + \dots},$$

$$288 = 4\sqrt{64 + 4^2\sqrt{64^2} + 4^2\sqrt{64^2} + 4^2\sqrt{64^2} + \dots},$$

$$4224 = 8\sqrt{256 + 8^2\sqrt{256^2} + 8^2\sqrt{256^2} + 8^2\sqrt{256^2} + \dots},$$

پی‌نوشت

1. Math. Spectrum
2. Yasar Atas