



مقدمه

یکی از روش‌های استدلال

ریاضی که در اثبات مسائلی در ترکیبات،

نظریه و اعداد، هندسه و دیگر مباحث ریاضی استفاده

می‌شود، اصل لانه کبوتری^۱ است که گاهی اصل جعبه‌ها یا

اصل حجره‌ها نیز نامیده می‌شود. دو صورت از این اصل در

زیر آمده است:

۱. اگر m کبوتر n لانه کبوتر را اشغال کنند و $m > n$ ، آن‌گاه

حداقل یک لانه کبوتر دارای دو یا بیش‌تر کبوتر است.

۲. اگر $k+1$ شیء در k جعبه قرار گیرند، آن‌گاه جعبه‌ای

وجود دارد که در آن حداقل دو شیء قرار دارد.

در این مقاله، به بررسی کاربردهای مختلفی از اصل لانه

کبوتری می‌پردازیم. مسائلی که با استفاده از این اصل ثابت

می‌شوند، در برخی موارد دارای راه‌حل‌های پیچیده‌ای به

همراه ابتکار در حل هستند و در بسیاری از مسابقات ریاضی

جهانی، مسائلی در این رابطه مطرح شده است. آنچه که در

اثبات مسائلی که به کمک اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرند

قابل توجه است، آن است که در حل مسأله دو عامل کبوترها

(اشیا) و لانه‌های کبوترها (جعبه‌ها) به طور مناسب انتخاب

شوند؛ طوری که تعداد کبوترها حداقل یک واحد بیشتر از

لانه‌ها باشد و سپس با استفاده از اصل لانه کبوتری، نتیجه

مطلوب را به دست می‌آوریم.

کاربرد در ارتباط بین افراد

مثال ۱. دبیرستانی دارای ۱۰۲۵ دانش‌آموز است. آیا

می‌توان گفت دو دانش‌آموز وجود دارند که حروف اول و آخر

نام فامیلی آنان یکسان است؟

حل: با توجه به آن که حرف اول و آخر نام فامیل هر

دانش‌آموز یکی از ۲۲ حرف الفبای فارسی است، لذا تعداد

نام‌های مختلفی که می‌توان به دست آورد، برابر است با

$$1024 = 22 \times 22$$

حال لانه‌های کبوترها را

این ۱۰۲۴ حالت به صورت

زیر در نظر می‌گیریم:

۱	۲	۳	...	۱۰۲۴
(الف)	اب	اپ	...	ی

در هریک از این لانه‌ها دو حرف الفبا قرار دارد که به ترتیب

حرف اول و آخر نام محصلان است. حال اگر این ۱۰۲۵

محصل کبوترها فرض شوند، چون تعداد کبوترها یکی بیش‌تر

از لانه‌های فوق است، بنابر اصل لانه کبوتری، در یک لانه

دو کبوتر قرار می‌گیرند و به عبارت دیگر، دو دانش‌آموز وجود

دارند که دارای حرف اول و آخر نام فامیل یکسانی هستند.

مثال ۲. ثابت کنید در یک جمع $n > 1$ نفری، حداقل دو

نفر وجود دارند که دارای تعداد دوستان یکسانی هستند.

برهان. اگر به هر کدام از این n نفر برگه‌ای بدهیم و

بخواهیم تعداد دوستان خود، در این جمع را درون این برگه

بنویسند، روی هر برگه یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$

نوشته می‌شود. حال لانه‌های کبوتر را به صورت زیر در نظر

می‌گیریم:

۱	۲	۳	...	n
۰	۱	۲	...	$n-1$

حال از این افراد می‌خواهیم برگه خود را در لانه متناظر

عدد روی برگه قرار دهند. توجه می‌کنیم که لانه‌های ۱ و n

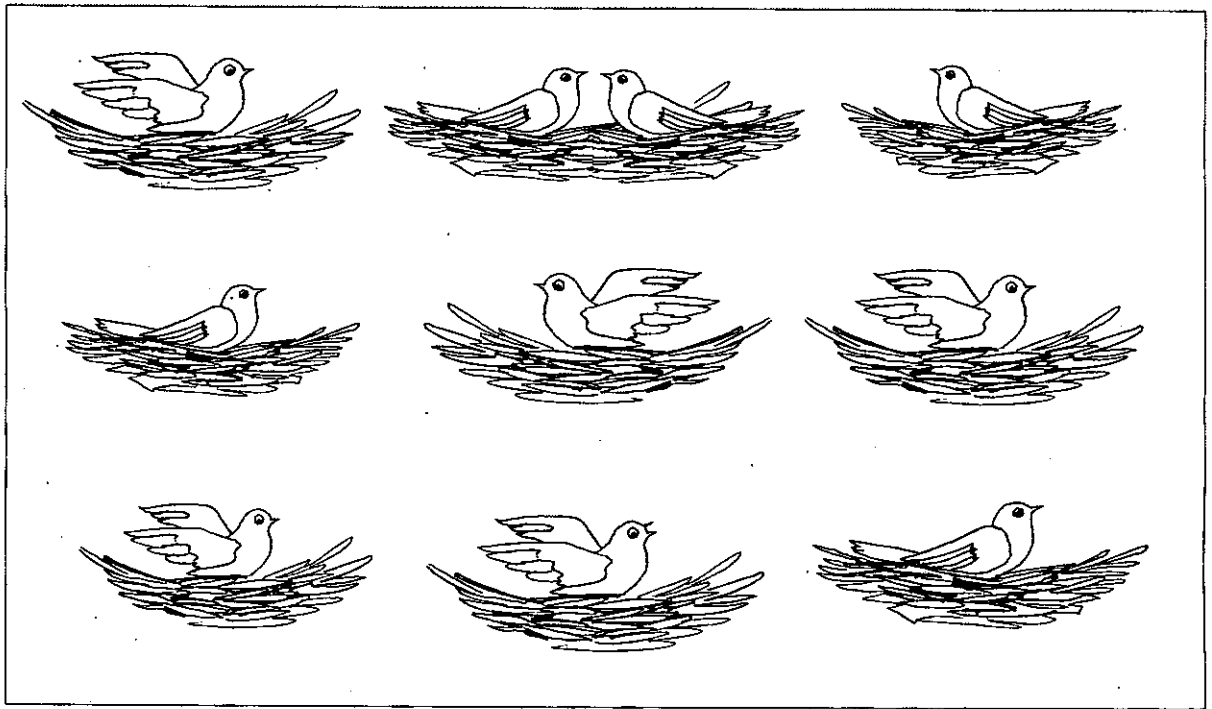
نمی‌توانند همزمان دارای برگه‌ای باشند؛ زیرا اگر در این جمع

کسی باشد که هیچ‌کس را نشناسد، ممکن نیست فردی باشد

که همگی این افراد را بشناسد. بنابراین تنها $n-1$ لانه خواهیم

داشت. در صورتی که این n نفر کبوترها باشند، ملاحظه

می‌کنیم که بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو نفر شماره برگه



یکسانی دارند؛ یعنی تعداد دوستان آنان برابر است.

کاربرد در نظریهٔ اعداد

مثال ۳. ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ ۶ عضوی مجموعهٔ $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ شامل دو عضو است که مجموعشان ۱۰ است.

برهان. ۵ جعبه را به صورت زیر برچسب گذاری می کنیم: ۱ و ۹ برای جعبهٔ اول، ۲ و ۸ برای جعبهٔ دوم، ۳ و ۷ برای جعبهٔ سوم، ۴ و ۶ برای جعبهٔ چهارم و در نهایت ۵ برای جعبهٔ پنجم. حال ۶ عدد از مجموعهٔ S انتخاب می کنیم و آن‌ها را درون جعبه‌هایی که همان برچسب را دارند، قرار می دهیم. اگر در این انتخاب ۵ باشد، پنج عدد دیگر انتخابی درون ۴ جعبه باقی مانده قرار می گیرند و بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از جعبه‌ها شامل حداقل دو عدد می شود که مجموع آن‌ها ۱۰ است. اگر در این انتخاب ۵ نباشد، ۶ عدد انتخابی باید درون ۴ جعبهٔ دیگر قرار گیرند و در این حالت نیز بنابر اصل لانه کبوتری، دو جعبه وجود خواهند داشت که شامل دو عدد با مجموع ۱۰ هستند.

مثال ۴. اگر ۱۱ عدد صحیح از مجموعهٔ

$S = \{1, 2, \dots, 100\}$ انتخاب کنیم، نشان دهید حداقل دو تایی

آن‌ها چون x و y وجود دارند به طوری که $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$.

برهان. می دانیم اگر $1 \leq x \leq 100$ ، آن گاه $1 \leq \sqrt{x} \leq 10$ و در نتیجه $1 \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq 10$. بنابرین $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ عددی در مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 10\}$ است. حال اگر ۱۱ عدد از مجموعهٔ S انتخاب کنیم، بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو تایی آن‌ها نظیر x و y هستند که $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{y} \rfloor$. در این جا ۱۰ حالت عدد $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ شمارهٔ لانه‌های کبوتر و ۱۱ عدد انتخابی کبوترها هستند. لذا باید داشته باشیم: $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$.

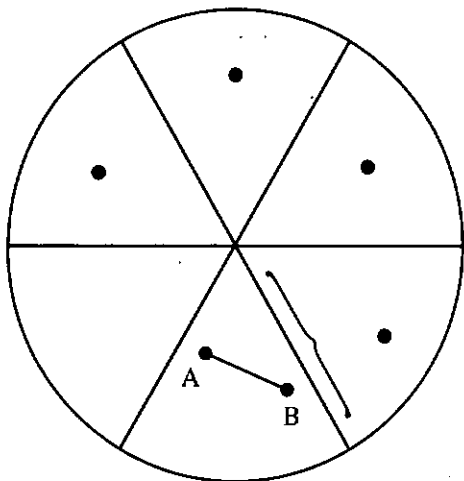
مثال ۵. نشان دهید اگر ۱۰۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S = \{1, 2, \dots, 200\}$ انتخاب شوند، دو عدد صحیح بین آن‌ها وجود دارند که یکی بر دیگری بخش پذیر است.

برهان. بنابر قضیهٔ اساسی حساب، هر عدد $n \in S$ را به طور منحصر به فردی می توان به شکل $n = 2^k \times m$ که k عدد صحیح و نامنفی و m عدد مثبت فردی است، نوشت. اگر ۱۰۱ عدد از S انتخاب شوند، چون تنها ۱۰۰ عدد صحیح فرد در S وجود دارند، آن گاه بنابر اصل لانه کبوتری، دو عدد

لذا فاصله ای کم تر از $\frac{1}{3}$ دارند ($MN < \frac{1}{3}$).

مثال ۷. با یک تفنگ ۷ عدد گلوله به سمت یک تخته تیراندازی دایره ای شکل به شعاع ۱۰ واحد شلیک می شوند. ثابت کنید دو گلوله وجود دارند که حداکثر ۱۰ واحد بایکدیگر فاصله دارند.

برهان. دایره را به ۶ قطاع مساوی طبق شکل مقابل تقسیم می کنیم.



هر قطاع را یک لانه کبوتر و هر گلوله را یک کبوتر می گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری، قطاعی وجود دارد که دو گلوله چون A و B درون آن است. چون بزرگ ترین فاصله بین این دو نقطه ۱۰ است؛ یعنی $AB \leq 10$ ، لذا حکم ثابت می شود.

مثال ۸. تعداد ۵۱ نقطه در یک مربع به ضلع ۱ واحد قرار دارند. ثابت کنید دایره ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وجود دارد که شامل سه تا از این نقاط است.

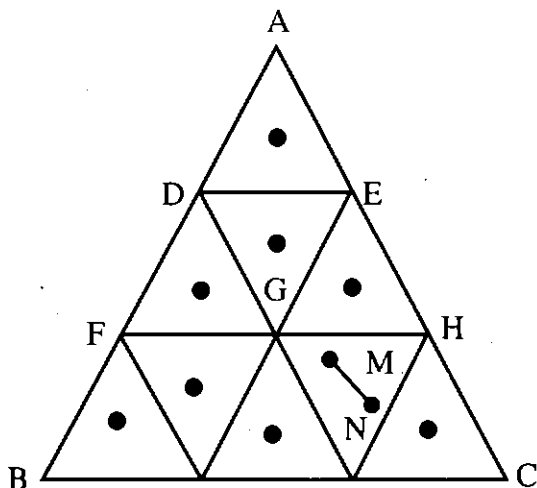
برهان. مربع را مطابق شکل مقابل، به ۲۵ مربع به ضلع

صحيح در S چون n_1 و n_2 وجود دارند که $n_1 = 2^{k_1} \times m$ و $n_2 = 2^{k_2} \times m$ ، و k_1 و k_2 اعداد صحيح و نامنفی هستند و $m \in \{1, 2, 5, \dots, 199\}$. در این مثال، ۱۰۰ حالت عدد m برای لانه های کبوتر و ۱۰۱ عدد انتخابی به عنوان کبوترها در نظر گرفته می شوند. حال اگر $k_1 \geq k_2$ ، آن گاه $n_1 | n_2$ و در غیر این صورت n_1 / n_2 .

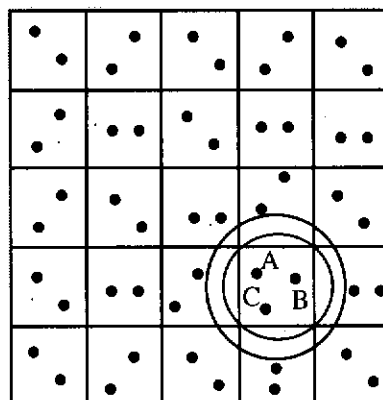
کاربرد در هندسه

مثال ۶. ثابت کنید اگر ۱۰ نقطه درون مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۱ واحد انتخاب کنیم، حداقل دو تای آنها فاصله ای کم تر از $\frac{1}{3}$ از هم دارند.

برهان. مطابق شکل زیر، مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱ را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{1}{3}$ تقسیم می کنیم؛



حال اگر ۱۰ نقطه درون این مثلث انتخاب کنیم، (نقاط کبوترها و مثلث ها لانه ها هستند). بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو تای آنها نظیر M و N در یک مثلث قرار می گیرند،



$\frac{1}{5}$ تقسیم می کنیم. در این صورت، باید در حداقل یکی از این لانه ها ۳ نقطه چون A، B و C باشد. در این حالت ۲۵ مربع کوچک لانه ها و ۵۱ نقطه کبوترها هستند. در صورتی که در هیچ کدام از لانه ها سه نقطه قرار نگیرد و به عبارت دیگر، در هر مربع کوچک، ۲ یا کم تر نقطه قرار گیرد، تعداد کل نقاط حداکثر $2 \times 25 = 50$ خواهد بود؛ در حالی که مجموع تعداد نقاط باید ۵۱ باشد. حال دایره ای محیط بر مربع شامل این سه نقطه در نظر می گیریم. اگر شعاع دایره محیطی مربع مفروض باشد، آن گاه:

$$r^2 + r^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow 2r^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$$

بنابراین شعاع دایره مورد نظر می تواند $\frac{1}{7}$ باشد.

آخرین مثال از کاربرد اصل لانه کبوتری را به صورت زیر مطرح می کنیم:

مثال ۹. فرض کنید یک تیم فوتبال حداقل یک گل در هر ۲۰ بازی متوالی خود زده است. اگر این تیم در مجموع ۳۰ گل در این ۲۰ بازی بزند، ثابت کنید دنباله ای از بازی های متوالی وجود دارد که این تیم در این بازی ها دقیقاً ۹ گل زده است.

برهان. گیریم S_i مجموع تعداد گل های کسب شده در بازی های اول تا i ام باشد ($1 \leq i \leq 20$). مجموعه

$A = \{S_1, \dots, S_{20}, S_1 + 9, \dots, S_{20} + 9\}$ را در نظر می گیریم. تمام اعضای A اعدادی صحیح و مثبت بین ۱ تا ۳۹ هستند. چون ۴۰ عضو در این مجموعه است، بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از اعداد دو بار در مجموعه A ظاهر می شود. چون این تیم در هر بازی حداقل یک گل می زند، لذا برای هر $j \neq i$ ، $S_i \neq S_j$ و در نتیجه برای هر $j \neq i$ ، $S_i + 9 \neq S_j + 9$ ؛ بنابراین باید i و j وجود داشته باشد که $S_i + 9 = S_j$ و $j < i$. بنابر این تعداد گل ها در بازی های $i+1$ ام تا j ام برابر است با:

$$S_j - S_i = 9$$

تمرین ۱. ثابت کنید در هر گردایه از ۳۱ عدد صحیح متمایز بین ۱ تا ۶۰، دو عدد وجود دارد که یکی دیگری را عادی می کند. تمرین ۲. ثابت کنید اگر ۷ عدد متمایز از مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ انتخاب شوند، آن گاه مجموع دو تای آن ها ۱۲ است.

تمرین ۳. در یک جعبه، مدادهایی به شرح زیر وجود دارند: ۱۰ قرمز، ۸ آبی، ۸ سبز و ۴ زرد. با چشم بسته یکی یکی از این جعبه مداد خارج می کنیم. حداقل تعداد مدادهایی که باید برداریم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مداد یک رنگ داریم، چند تا است؟

راهنمایی: برای هر رنگ یک لانه بگیرد.

تمرین ۴. ۱۱ عدد از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل دو تا از این اعداد انتخابی نسبت به هم اول اند.

راهنمایی: هر دو عدد متوالی را در یک لانه قرار دهید.

تمرین ۵. تعداد $n^2 + 1$ نقطه درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می کنیم. ثابت کنید دو تا از این نقاط وجود دارند که فاصله آن ها کم تر از $\frac{\sqrt{2}}{n}$ است.

زیر نویس.....

۱. The Pigeon hole Principle