

اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن

در شماره قبل به بررسی صورت اصل شمول و عدم شمول و چند مثال از کاربردهای آن پرداختیم. در این قسمت، کاربردهای دیگری از این اصل تشریح می شوند.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (2)$$

ابتدا $|A_1|$ را می یابیم. مجموعه A_1 به معنای زیر مجموعه ای از S است که در آن b_1 در بُرد f قرار ندارد. لذا کافی است تعداد توابعی را بیابیم که می توان از A در مجموعه $\{b_2, b_3, \dots, b_n\}$ نوشت. این تعداد برابر است با: $(n-1)^m$. به این ترتیب:

$$|A_1| = |A_2| = \dots = |A_n| = (n-1)^m \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n |A_i| = \binom{n}{1} (n-1)^m$$

حال، $|A_1 \cap A_2|$ را می یابیم. مجموعه $A_1 \cap A_2$ به معنای زیر مجموعه ای از S است که در آن b_1 و b_2 در بُرد f قرار ندارند. این به معنای یافتن تعداد توابعی است که می توان از A در مجموعه $\{b_3, b_4, \dots, b_n\}$ نوشت و برابر است با: $(n-2)^m$. چون تعداد اعضای اشتراک های دوتایی مجموعه های A_1 تا A_n برابرند، لذا:

مثال ۱

محاسبه تعداد توابع پوشا: فرض کنیم A و B مجموعه هایی به ترتیب m و n عضوی باشند؛ به طوری که $m \geq n$. در این صورت تعداد توابع پوشای $f: A \rightarrow B$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^m \quad (1)$$

اثبات: فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ اگر S مجموعه تمام توابع $f: A \rightarrow B$ باشد، آن گاه، $|S| = n^m$. حال مجموعه های A_i ، $1 \leq i \leq n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_i = \{f \in S \mid b_i \notin R_f\}$$

به عبارت دیگر، A_i زیر مجموعه ای از S است که در آن عضو b_i در بُرد f قرار ندارد. هدف یافتن $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ است. در واقع $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ ، تعداد توابعی را که پوشا نیستند مشخص می کند. برای این منظور، از اصل شمول و عدم شمول به این صورت استفاده می کنیم:

لازم به توضیح است که رابطه (۲)، حتی اگر $m < n$ ، قابل محاسبه است، ولی در این حالت، حاصل رابطه برابر صفر است. در واقع در صورتی که $m < n$ ، تابع پوشایی از A در B وجود ندارد.

مثال ۲

تابع فی اویلر: فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ و $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$ ، تجزیه m به حاصل ضرب عوامل اول باشد که در آن $P_1, P_2, \dots, P_n$ اعداد اول و متمایز هستند. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ طبیعی هستند، در این صورت، تعداد اعداد طبیعی بین ۱ تا m که نسبت به m اول هستند، برابر است با:

$$\phi(m) = m \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_n}\right) \quad (۳)$$

$\phi(m)$ را تابع فی اویلر می نامند. به منظور اثبات رابطه (۳)، از اصل شمول و عدم شمول استفاده می کنیم. ابتدا مجموعه های A_i ، $1 \leq i \leq n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_i = \{1 \leq k \leq m : P_i | k\}$$

به عبارت دیگر، برای هر $1 \leq i \leq n$ ، A_i برابر است با مجموعه اعداد طبیعی نابیش تر از m که عدد اول P_i آن ها را عاد می کند. هدف یافتن $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ است. در واقع اعضای از مجموعه $S = \{K \in \mathbb{N} | K \leq m\}$ را می خواهیم که به هیچ یک از A_i ها متعلق نباشند به این منظور چون،

$$|A_i| = \frac{m}{P_i} \text{ و } 1 \leq i \leq n$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{P_i P_j} \text{ و } 1 \leq i < j \leq n$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{m}{P_i P_j P_k}, 1 \leq i < j < k \leq n$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \dots = |A_{n-1} \cap A_n| = (n-2)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2} (n-2)^m$$

به همین ترتیب:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{n}{3} (n-3)^m$$

با ادامه این روند، می توان سایر مجموعه های رابطه (۲) را به دست آورد. در نتیجه با جایگذاری نتایج در رابطه (۲):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \binom{n}{1} (n-1)^m - \binom{n}{2} (n-2)^m +$$

$$\binom{n}{3} (n-3)^m - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} (n-n)^m$$

با توجه به این که: $|S| = n^m = \binom{n}{0} (n-0)^m$ ، لذا:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \end{aligned}$$

چون $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ ، لذا:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^m \end{aligned}$$

به عنوان مثال، اگر $m = 4$ و $n = 3$ ، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{3-i} (3-i)^4 &= \\ \binom{3}{3} 3^4 - \binom{3}{2} 2^4 + \binom{3}{1} 1^4 - \binom{3}{0} 0^4 &= 36 \end{aligned}$$

$$|A_1 \cap \dots \cap A_n| = \frac{m}{P_1 P_2 \dots P_n}$$

لذا بنابر رابطه (۲)،

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n \frac{m}{P_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m}{P_i P_j} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{m}{P_i P_j P_k} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{m}{P_1 P_2 \dots P_n}$$

در نتیجه با توجه به این که $|S| = m$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= m \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{P_i P_j} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{1}{P_i P_j P_k} + \dots + (-1)^n \frac{1}{P_1 P_2 \dots P_n} \right) \\ &= \frac{m}{P_1 P_2 \dots P_n} [P_1 P_2 \dots P_n - (P_2 P_3 \dots P_n + P_1 P_3 \dots P_n + \dots + P_1 P_2 \dots P_{n-1}) + (P_2 P_3 \dots P_n + P_2 P_3 P_5 \dots P_n + \dots + P_1 P_2 \dots P_{n-2}) - \dots + (-1)^{n-1} (P_n + P_{n-1} + \dots + P_1) + (-1)^n] \\ &= \frac{m}{P_1 P_2 \dots P_n} [(P_1 - 1)(P_2 - 1) \dots (P_n - 1)] \\ &= m \left[\frac{(P_1 - 1)}{P_1} \times \frac{(P_2 - 1)}{P_2} \times \dots \times \frac{(P_n - 1)}{P_n} \right] \\ &= m \left(1 - \frac{1}{P_1} \right) \left(1 - \frac{1}{P_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_n} \right) \end{aligned}$$

مثال ۳

مسئله منشی گنج: یک منشی n نامه و نشانی هریک از آن‌ها را روی n پاکت نامه تایپ کرده است و می‌خواهد هر نامه را در پاکت مربوطه قرار دهد. گیرنده‌های نامه‌ها و نشانی هریک از آن‌ها متفاوت هستند. به چند طریق ممکن است، این منشی هیچ نامه‌ای را در پاکت مربوط به خودش قرار ندهد؟

حل

فرض کنیم S مجموعه مربوط به جای گشت‌های n شیء

تمایز باشد. در این صورت، $|S| = n!$. به عبارت دیگر به $n!$ طریق می‌توان n نامه متفاوت را در n پاکت نامه قرار داد. نامه‌ها و پاکت مربوط به هر کدام را از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. حال مجموعه‌های A_i ، $1 \leq i \leq n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

{جای گشت‌هایی از S که نامه i ام در پاکت i ام قرار گیرد.}

هدف یافتن $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}|$ است. می‌دانیم:

$$|A_i| = (n-1)! \quad \text{و} \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)! \quad \text{و} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)! \quad \text{و} \quad 1 \leq i < j < k \leq n$$

و در نهایت $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 1$ در نتیجه بنابر رابطه (۲)، داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \binom{n}{1} (n-1)! -$$

$$\binom{n}{2} (n-2)! + \binom{n}{3} (n-3)! - \dots + (-1)^{n-1} \times 1$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| &= n! - \left[\binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \times \binom{n}{n} \times 1 \right] = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \quad (۴) \end{aligned}$$

به عنوان مثال، اگر بخواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۵ نامه متفاوت را در ۵ پاکت نامه طوری قرار داد که هیچ نامه‌ای در پاکت مربوط به خودش قرار نگیرد، کافی است رابطه (۴) را به ازای $n = 5$ حساب کنیم. این مقدار برابر خواهد شد با:

$$120 \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$$

مثال ۴

یک معلم ریاضی ۱۰ پرسش برای درس خود طرح کرده و ۱۰۰ امتیاز برای کل آن‌ها در نظر گرفته است. وی به چند طریق می‌تواند این ۱۰۰ امتیاز را به پرسش‌ها اختصاص

دهد، در صورتی که هر پرسش حداقل ۵ و حداکثر ۱۵ امتیاز داشته باشد.

حل:

هدف یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 100$ با شرط‌های $5 \leq x_i \leq 15$ ، $1 \leq i \leq 10$ است. به این منظور کافی است، تعداد جواب‌های صحیح معادله $x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{10} = 50$ را که $x'_i = x_i - 5$ ، $1 \leq i \leq 10$ ، با شرط‌های $0 \leq x'_i \leq 10$ به دست آوریم. اگر S تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، آن‌گاه $|S| = \binom{59}{50}$. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

{جواب‌های معادله فوق با شرط $x'_i > 10$ ، $A_i = \{x'_i > 10\}$ ، $1 \leq i \leq 10$.

به این ترتیب، هدف به دست آوردن $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{10}}|$ است. بنابراین اصل شمول و عدم شمول:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{10}}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}|$$

$$= \binom{59}{50} - \left[\binom{10}{1} \binom{48}{39} - \binom{10}{2} \binom{37}{28} + \binom{10}{3} \binom{26}{17} - \binom{10}{4} \binom{15}{6} + \dots \right]$$

مثال ۵

به چند طریق می‌توانیم ۱۰ نفر را که هر دوی آن‌ها از یک شهر آمده‌اند، دور یک میز گرد چنان بنشانیم که هیچ دو هم‌شهری کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

حل:

فرض کنیم S مجموعه مربوط به جای گشت‌های ۱۰ شیء متمایز دور یک میز گرد باشد. در این صورت $|S| = 9!$. مجموعه‌های A_i ، $1 \leq i \leq 5$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

{جای گشت‌هایی از S که در آن‌ها دو هم‌شهری نام کنار یکدیگر قرار دارند. $A_i = \{$

بنابراین می‌خواهیم

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_5}| = |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_5}|$$

$$|A_i| = 2! \times 8! \quad , 1 \leq i \leq 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^5 |A_i| = \binom{5}{1} \times 2 \times 8!$$

$$|A_i \cap A_j| = (2!)^2 \times 7! \quad , 1 \leq i < j \leq 5$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| = \binom{5}{2} \times 4 \times 7!$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (2!)^3 \times 6! \quad , 1 \leq i < j < k \leq 5$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5}{3} \times 8 \times 6!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5| = (2!)^5 \times 4!$$

با ادامه این روند: در نتیجه بنا بر اصل شمول و عدم شمول:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_5}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5|$$

$$= 9! - \left[\binom{5}{1} \times 2 \times 8! - \binom{5}{2} \times 4 \times 7! + \binom{5}{3} \times 8 \times 6! - \binom{5}{4} \times 16 \times 5! + \binom{5}{5} \times 32 \times 4! \right] = 112512$$

تمرین

۱. الف) تعداد جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \quad \text{با شرط‌های } -5 \leq x_i \leq 10, \quad 1 \leq i \leq 4 \quad \text{به دست آورید.}$$

ب) تعداد جواب‌های صحیح معادله فوق را با شرط‌های $0 \leq x_1 \leq 5$ ، $0 \leq x_2 \leq 6$ ، $0 \leq x_3 \leq 7$ و $3 \leq x_4 \leq 8$ به دست آورید.

۲. به چند طریق می‌توان سه x و سه y و سه z را چنان مرتب کرد که هیچ یک از حروف سه بار متوالی ظاهر نشود؟

۳. تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیش‌تر از ۱۰۰۰ را که مجذور کامل، مکعب کامل یا توان چهارم کامل نباشند، به دست آورید.

۴. به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱ و ۲ و ... و ۸ را در یک خط چنان مرتب نمود که هیچ یک از الگوهای

۱۲ و ۲۳ و ۳۴ و ... و ۷۸ و ۸۱ مشاهده نشود؟