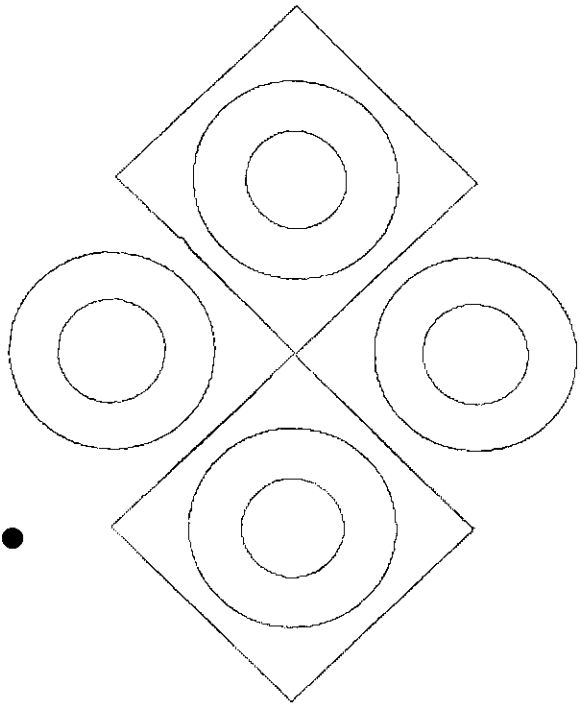


اصل ردّ و شمول

(قابل استفاده دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی)

● امیرمنصور خانمحمد و امیرفرزاد از دبیرستان سروش

● ترجمه از کتاب ریاضیات گسسته گریمالدی



اصل ردّ و شمول

اصل ردّ و شمول بازگشتی به قوانین اساسی شمارش است. هدف از آن توسعه روشهای شمارش در مورد مسائل حل شده توسط نمودار «ون» است. به عنوان مثال یکی از کاربردهای این اصل شمارش تعداد توابع تعریف شده از A به B است $(f: A \rightarrow B)$ به شرط آن که $N(A) = m$ و $N(B) = n$ و $m \geq n$ باشد. از کاربردهای اساسی این اصل حل مسائل مختلف شمارش پرورش غیرمستقیم است.

بخش اول

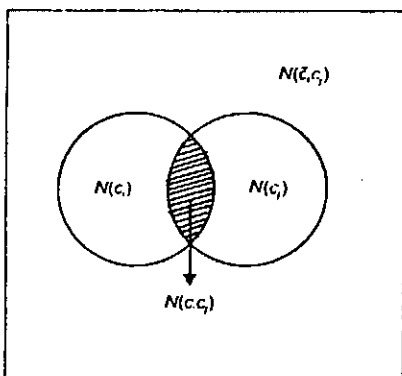
صورت اصل ردّ و شمول

در این قسمت ما نگارش جدیدی را تعریف کرده، سپس به خود اصل می پردازیم و در ادامه با بیان مثالهایی آن را توضیح می دهیم. فرض کنید S مجموعه ای باشد که $N(S) = m$ و $C_1, C_2, \dots, C_k$ زیرمجموعه های آن باشند؛ مشخص است که بعضی از آنها بیش از یک عضو دارند.

بدیهی است که $N(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k)$ تعداد عضوهای S هستند، که در هیچک از زیرمجموعه های $C_1, C_2, \dots, C_k$ شرکت ندارند. لازم به تذکر است که این با $N(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k)'$ متفاوت است.

با توجه به شکل زیر اگر $N(C_i)$ تعداد اعضای مجموعه سمت چپ و $N(C_j)$ تعداد اعضای مجموعه سمت راست باشد، محدوده هاشور خورده $N(C_i \cap C_j)$ خواهد بود (نمودار ون). با توجه به شکل زیر $N(C_i' \cap C_j')$ به این صورت محاسبه می گردد:

$$N(C_i' \cap C_j') = N(S) - [N(C_i) + N(C_j)] + N(C_i \cap C_j)$$



(شکل ۱)

(قسمت هاشور خورده در داخل کروشه دو بار کم شده که یک بار آن را اضافه می کنیم).

حالت سه تایی مثال فوق نیز صادق است:

$$N(C_i' \cap C_j' \cap C_k') = N(S) - [N(C_i) + N(C_j) + N(C_k)] +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \dots + (-1)^t N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_t) \\
 \Rightarrow N' = N(S) - \sum_{i=1}^t N(C_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(C_i \cap C_j) - \\
 &\sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(C_i \cap C_j \cap C_k) + \dots + \\
 &(-1)^t N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_t)
 \end{aligned}$$

اثبات:

عضو دلخواه x از مجموعه S را در نظر می‌گیریم:
 الف) یا این عضو در هیچیک از زیر مجموعه‌ها حضور ندارد؛ در این صورت در سمت چپ تساوی یکبار شمرده می‌شود و در سمت راست نیز فقط یکبار شمرده می‌شود که آن در $N(S)$ است.

ب) و یا اینکه عضو x در r تا از این زیر مجموعه‌ها حضور دارد ($1 \leq r \leq t$)؛ با توجه به این مطلب این عضو در طرف راست تساوی:

(۱) یکبار در $N(S)$ شمرده می‌شود.

(۲) r بار در $\sum_{1 \leq i \leq t} N(C_i)$ شمرده می‌شود.

(۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1 \leq i < j \leq t} N(C_i \cap C_j)$ شمرده می‌شود.

⋮

$\binom{r}{r}$ بار در $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq t} N(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_r})$ شمرده می‌شود.

پس تعداد دفعات شمارش عضو x در طرف راست تساوی برابر است با:

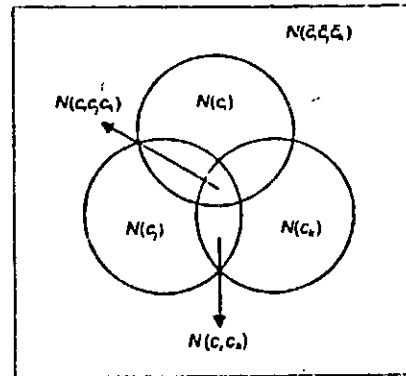
$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$$

که این صحت اصل را تأیید می‌کند، زیرا این عضو در طرف راست تساوی نیز صفر بار شمرده می‌شود؛ چرا که ما به دنبال اعضای هستیم که اشتراک متمم زیرمجموعه‌ها را برآورده سازند.

نتیجه ۱:

طبق فرض قضیه ۱ نتیجه می‌شود که $N - N'$ مشخص-کننده تعداد عضوهای است که حداقل در یکی از C_i ها شرکت

$$[N(C_i \cap C_k) + N(C_i \cap C_j) + N(C_j \cap C_k)] - N(C_i \cap C_j \cap C_k)$$



(شکل ۲)

قسمتهای مشترک بین دو مجموعه در گروه اول هر کدام دوبار کم شده‌اند، که در گروه دوم این موضوع جبران شده است؛ قسمت مشترک بین هر سه مجموعه سه بار در گروه اول کم شده و سه بار در گروه دوم اضافه شده لذا باید یکبار کم شود.
 حال به کمک حالت‌های دوتایی و سه‌تایی به بیان اصل می‌پردازیم.

قضیه یک:

یک مجموعه n عضوی با زیرمجموعه‌های C_i ($1 \leq i \leq t$) را در نظر بگیرید. تعداد اعضای از این مجموعه n عضوی (S) که در هیچیک از C_i ها حضور ندارند به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$N' = N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap \dots \cap C'_t) =$$

قضیه رد و شمول بیان می‌دارد:

$$\begin{aligned}
 N' = N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap \dots \cap C'_t) = \\
 N(S) - [N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_t)] \\
 + [N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + \dots + N(C_1 \cap C_t) + \\
 N(C_2 \cap C_3) + \dots + N(C_{t-1} \cap C_t)] \\
 - [N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + N(C_1 \cap C_2 \cap C_4) + \dots + \\
 N(C_{t-2} \cap C_{t-1} \cap C_t)]
 \end{aligned}$$

با بکار بردن اصل رد و شمول به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} N(C_1' \cap C_2' \cap C_3') &= S - S_1 + S_2 - S_3 \\ &= N(S) - [N(C_1) + N(C_2) + N(C_3)] + \\ &\quad [N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + N(C_2 \cap C_3)] - \\ &\quad N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) \\ &= 100 - [50 + 32 + 20] + [16 + 10 + 6] - 3 = 26 \end{aligned}$$

که این ۲۶ عدد عبارتند از :

$$\begin{aligned} &41 - 37 - 31 - 29 - 23 - 19 - 17 - 13 - 7 - 1 \\ &77 - 73 - 71 - 67 - 61 - 59 - 53 - 49 - 47 - 43 - \\ &\quad 97 - 91 - 89 - 83 - 79 - \end{aligned}$$

مثال ۲:

با استفاده از ترکیب با تکرار می‌توانیم تعداد جوابهای صحیح غیرمنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را بیابیم. در اینجا مسأله را طور دیگری مطرح می‌کنیم و برای آن شرط $x_i \leq 7$ ($1 \leq i \leq 4$) را قرار می‌دهیم. در اینجا $N(S)$ بر طبق آنچه از مسائل ترکیب با تکرار می‌دانیم برابر است با :

$$N(S) = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$$

باز هم برای بکارگیری اصل رد و شمول چهار زیرمجموعه تعریف می‌کنیم :

زیرمجموعه C_i ($1 \leq i \leq 4$) در بردارند کلیه جوابهای معادله فوق است وقتی که $x_i > 7$ یا آنکه $x_i \geq 8$ باشد. واضح است که جواب مسأله فوق با شرط اضافه شده عبارتست از :

$$N(C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap C_4')$$

اما در این مثال $N(C_1) = N(C_2) = N(C_3) = N(C_4)$ می‌باشد. بدیهی است که برای شمارش $N(C_1)$ باید جوابهای معادله $(x_1 = y_1 + 8 \Rightarrow y_1 \geq 0) y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را بیابیم؛ که طبق توضیح داده شده در این معادله :

$$y_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

دارند یعنی :

$$N(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t) = N - N'$$

قبل از حل چند مثال در این باب تعریف می‌کنیم :

$$S_i = N(S)$$

$$S_1 = [N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_t)]$$

$$S_2 = [N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + \dots + N(C_1 \cap C_t) + N(C_2 \cap C_3) + \dots + N(C_{t-1} \cap C_t)]$$

که در حالت کلی داریم :

$$S_k = \sum_{1 \leq k \leq t} N(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k})$$

لازم به تذکر است تعداد جمله‌هایی، که در S_k با یکدیگر جمع می‌شوند. $\binom{t}{k}$ است.

مثال ۱:

تعداد اعداد صحیح و مثبت را که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند معین کنید. ($1 \leq n \leq 100$)

در اینجا $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ و $N(S) = 100$ است. برای حل سه زیرمجموعه در S تعریف می‌کنیم :

الف - C_1 : اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند.

ب - C_2 : اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند.

ج - C_3 : اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیرند.

بدیهی است که جواب مسأله $N(C_1' \cap C_2' \cap C_3')$ است.

برای حل این مسأله از تابع جزء صحیح کمک می‌گیریم :

$$N(C_1) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$$

$$N(C_2) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

$$N(C_3) = \left[\frac{100}{5} \right] = 20$$

$$N(C_1 \cap C_2) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$$

$$N(C_1 \cap C_3) = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$$

$$N(C_2 \cap C_3) = \left[\frac{100}{15} \right] = 6$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$$

با استفاده از مطالب آنالیز ترکیبی در مبحث ترکیب با تکرار : $f: A \rightarrow B$ برابر خواهد شد با :

$$N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap \dots \cap C'_n)$$

برای هر $1 \leq i \leq n$ واضح است که $N(C_i)$ برابر خواهد شد با $(n-1)^m$ چرا که تمام اعضای B به جز b_i می توانند در برد تابع شرکت جویند ؛ با توجه به اینکه n عضو داریم پس S_1 بصورت زیر محاسبه می شود :

$$S_1 = [N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_n)] =$$

$$n(n-1)^m = \binom{n}{1}(n-1)^m$$

در حالتی دوتایی هم دو عضو b_i و b_j نمی توانند در برد متقابل شرکت کنند پس داریم :

$$S_2 = [N(C_1 \cap C_2) + N(C_1 \cap C_3) + \dots +$$

$$N(C_1 \cap C_n) + \dots + N(C_{n-1} \cap C_n)] = \binom{n}{2}(n-2)^m$$

در حالت کلی بازای هر k و $(1 \leq k \leq n)$ داریم :

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k}) =$$

$$\binom{n}{k}(n-k)^m$$

پس بنا به اصل رد و شمول داریم :

$$N(C'_1 \cap C'_2 \cap \dots \cap C'_n) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots +$$

$$(-1)^n S_n$$

$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m -$$

$$\binom{n}{3}(n-3)^m + \dots + (-1)^n(n-n)^m$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{n-i} (n-i)^m$$

مثال ۴ :

به چند حالت ۲۶ حرف الفبای انگلیسی می توانند مرتب شوند، به طوری که در این ترتیبها هیچ یک از کلمات زیر درست نشوند.

Car, dog, pun, byte

$C_i (1 \leq i \leq 4)$ را مجموعه ای تعریف می کنیم که در آن این کلمات کنار هم تشکیل شوند. به عنوان مثال C_1 یعنی ترکیباتی که کلمه Car در آن ساخته شود. در واقع اگر S را مجموعه کلیه

$$N(C_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$\Rightarrow S_1 = \binom{4}{1} \binom{13}{10}$$

به همین ترتیب $N(C_1 \cap C_2)$ برابر است با تعداد جوابهای معادله $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 2$ که برابر است با :

$$N(C_i \cap C_j) = \binom{5}{2} \Rightarrow S_2 = \binom{5}{2} \binom{4}{2}$$

در حالت $N(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$ ما به دنبال جوابهای معادله $y_1 + y_2 + y_3 + x_4 = -6$ هستیم، که نتیجه روشن است ؛ این معادله جواب ندارد لذا :

$$N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap C'_4) = N(S) - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 =$$

$$\binom{21}{18} - \binom{4}{1} \binom{13}{10} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$$

بنابراین از بین ۱۳۳۰ عدد مثبتی که جواب معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ هستند فقط ۲۴۶ تا از آنها هستند، که شرط $x_i \leq 7 (1 \leq i \leq 4)$ را برآورده می سازند.

مثال ۳: یافتن تعداد توابع پوشا

مجموعه A و B را در نظر می گیریم. مجموعه S را تمام توابع تعریف شده از A در B می نامیم. و داریم $N(S) = n^m$ زیرا از هر یک از عناصر دامنه می توان n فلش به سوی عناصر برد خارج نمود و چون عناصر دامنه m تا هستند بنا به اصل ضرب تعداد توابع تعریف شده از A در B ، n^m خواهد بود.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \quad (m \geq n)$$

باز هم برای بکارگیری اصل رد و شمول زیر مجموعه هایی

تعریف می کنیم. بازای هر $1 \leq i \leq n$ زیرمجموعه C_i از S را تعریف می کنیم بعنوان توابعی که در آن b_i بعنوان برد تابع تعریف نشده است. بدیهی است که $N(C'_i)$ تعداد توابعی است که از A در B تعریف شده اند و b_i برد آنها است و در حالت کلی تعداد

چهار عامل اول تجزیه می‌گردد، به دست می‌آوریم؛ واضح است که در حالت کلی روش همین خواهد بود.

$$(m = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_r^{a_r})$$

مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ را در نظر می‌گیریم، بازای $1 \leq i \leq r$ زیرمجموعه C_i شامل اعضای S است که بر P_i بخش‌پذیرند؛ بنابراین طبق تعریف تابع φ اولر خواهیم داشت:

$$\varphi(m) = N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap C'_4)$$

برای به دست آوردن اعضای مجموعه C_i کافیست، که m را بر عامل اول P_i تقسیم نمایم و همچنین برای به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه $C_i \cap C_j$ نیز کافیست m را بر عاملهای اول P_i و P_j توأماً تقسیم نمایم و این برای بقیه ادامه می‌یابد:

$$N(C_i \cap C_j \cap C_k) = \frac{m}{P_i P_j P_k} \quad (1 \leq i < j < k \leq r),$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4}$$

$$\rightarrow \varphi(m) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$$

$$\begin{aligned} &= m - \left[\frac{m}{P_1} + \frac{m}{P_2} + \frac{m}{P_3} + \frac{m}{P_4} \right] + \left[\frac{m}{P_1 P_2} + \frac{m}{P_1 P_3} + \dots + \frac{m}{P_2 P_3} \right] - \left[\frac{m}{P_1 P_2 P_3} + \dots + \frac{m}{P_2 P_3 P_4} \right] + \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4} \\ &= m \left[1 - \left(\frac{1}{P_1} + \dots + \frac{1}{P_r} \right) + \left(\frac{1}{P_1 P_2} + \frac{1}{P_1 P_3} + \dots + \frac{1}{P_r P_4} \right) - \left(\frac{1}{P_1 P_2 P_3} + \dots + \frac{1}{P_2 P_3 P_4} \right) + \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4} \right] \\ &= \frac{m}{P_1 P_2 P_3 P_4} [(P_1 - 1)(P_2 - 1)(P_3 - 1)(P_4 - 1)] \\ &= m \left(\frac{P_1 - 1}{P_1} \right) \left(\frac{P_2 - 1}{P_2} \right) \left(\frac{P_3 - 1}{P_3} \right) \left(\frac{P_4 - 1}{P_4} \right) = \end{aligned}$$

$$m \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{P_i} \right)$$

با توجه به این مثال $\varphi(n)$ در حالت کلی بشکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{P_i} \right)$$

برای مثال عدد 23100 را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(23100) &= \varphi(2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11) = \\ (23100) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) \left(1 - \frac{1}{7} \right) \left(1 - \frac{1}{11} \right) &= 4800 \end{aligned}$$

ترتیبهای ۲۶ حرف بگیریم، هر کدام از مجموعه‌های C_i یک زیرمجموعه از S هستند. برای شمردن اعضای هر یک از C_i ها هر یک از کلمات مطلوب را یک حرف فرض می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$N(S) = 26!$$

$$N(C_1) = N(C_2) = N(C_3) = 24! \quad N(C_4) = 23!$$

$$N(C_1 \cap C_2) = N(C_1 \cap C_3) = N(C_2 \cap C_3) = 22!$$

$$N(C_i \cap C_j) = 21! \quad (i \neq j)$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 20! \quad N(C_i \cap C_j \cap C_k) = 19!$$

$$(1 \leq i < j < k \leq 3) \quad N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 17!$$

با توجه به اصل ردّ و شمول تعداد ترتیبهای مطلوب برابر خواهد بود با:

$$N(C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 \cap C'_4) = 26! - [2(24!) + 23!] +$$

$$[2(22!) + 3(21!)] - [20! + 3(19!)] + 17!$$

مثال بعدی در مورد نظریه اعداد است. در این مثال تابع

فی‌اولر معرفی و ساخته می‌شود.

مثال ۵:

عدد صحیح و مثبت n را در نظر می‌گیریم. تابع $\varphi(n)$ را به این صورت تعریف می‌نماییم، که تعداد اعداد کوچکتر از n را به ما بدهد که نسبت به n اول هستند. واضح است که اگر m یکی از این اعداد باشد $1 \leq m \leq n$ می‌باشد. این تابع به تابع «فی‌اولر» مشهور است. برای مثال:

$$\varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2,$$

$$\varphi(5) = 4, \quad \varphi(6) = 2$$

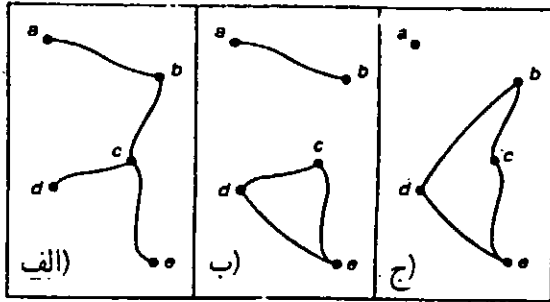
بدیهی است که برای هر عدد اول P مثل $\varphi(P) = P - 1$:

زیرا کلیه اعداد کوچکتر از عدد اول P نسبت به آن اول هستند.

ما به دنبال آن هستیم، که رابطه‌ای بین n و $\varphi(n)$ بیابیم و یک فرمول دقیق برای آن به دست آوریم. کاربرد اصل در این مثال مانند مثال یک است. می‌دانیم هر عدد صحیح قابل تجزیه به عوامل اول بصورت زیر است:

$$n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_t^{a_t} \quad 1 \leq i \leq t (a_i \geq 1)$$

ما این رابطه را در حالتی که عدد m حداکثر به حاصلضرب



(شکل ۳)



تفریح اندیشه ۶

خطهای متقاطع

در صورتی که شش خط در تکه‌ای کاغذ چنان رسم شوند که هر خط هر خط دیگر را قطع کند و هیچ سه خطی در یک نقطه متقاطع نباشند چند مثلث تشکیل می‌شود؟
تبصره: این معما توانایی خواننده را در شمارش روشدار امتحان می‌کند. در صورتی که در مورد آن عجلوانه عمل کنید، ممکن است گیج شوید.

جواب در صفحه ۸۸

مثال ۶:

یک مهندس تصمیم دارد بین ۵ دهکده راههایی ایجاد کند. به چند طریق او می‌تواند این کار را انجام دهد، به شرطی که در انتهای کار هیچ دهکده‌ای نباشد که به آن راهی وارد نشود؟ (ایزوله)

برای درک بهتر این مثال به شکلهای زیر توجه کنید. شکلهای «الف» و «ب» مطلوب ما هستند ولی شکل «ج» مورد قبول ما نیست؛ چرا که دهکده a در آن ایزوله شده است.

برای حل این مثال مجموعه تمام راههایی را که می‌توانیم بین این ۵ دهکده ایجاد نماییم با عنوان مجموعه S در نظر می‌گیریم. تعداد راههای موجود برابر با 2^{10} است. توضیح اینکه بین هر دو دهکده راه واصل می‌تواند وجود داشته باشد و می‌تواند موجود نباشد، که با توجه به اصل ضرب و قانون ترکیب تعداد راهها به این صورت محاسبه می‌شود:

$$N(S) = 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10}$$

زیرمجموعه‌های $C_i (1 \leq i \leq 5)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که هر یک از C_i ها مجموعه راههایی هستند، که در آنها یک دهکده ایزوله شده است. واضح است که جواب مسأله برابر است با:

$$N(C_1' \cap C_2' \cap C_3' \cap C_4' \cap C_5')$$

داریم:

$$N(C_1) = 2^6 \Rightarrow S_1 = \binom{5}{1} 2^6$$

$$N(C_1 \cap C_2) = 2^3 \Rightarrow S_2 = \binom{5}{2} 2^3$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 2^1 \Rightarrow S_3 = \binom{5}{3} 2^1$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 2^0 \Rightarrow S_4 = \binom{5}{4} 2^0$$

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5) = 2^0 \Rightarrow S_5 = \binom{5}{5} 2^0$$

طبق اصل رد و شمول:

$$N(C_1' \cap \dots \cap C_5') = 2^{10} - \binom{5}{1} 2^6 + \binom{5}{2} 2^3 -$$

$$\binom{5}{3} 2^1 + \binom{5}{4} 2^0 - \binom{5}{5} 2^0 = 768$$