

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به دری
شهودی، استدلال‌های استقرایی و
قیاسی و محدودیت‌های آن‌ها، استدلال
استنتاجی و مثال نقض صحبت کردیم.
اینک در ادامه‌ی آن، استدلال‌های دیگر
ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال ریاضی‌های

(قسمت ۳)

• میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

برای دانش‌آموزان سال سوم

قضیه‌ی شرطی

هر قضیه که به صورت ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ (اگر p آن‌گاه q)
باشد و با توجه به درستی p بتوان درستی q را نتیجه گرفت، قضیه‌ای
شرطی است. در قضیه‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را فرض و q را حکم
قضیه می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $x > 2$ ، آن‌گاه $x - 3 > 1$.

حل:

فرض: $x > 2$

حکم: $x - 3 > 1$

برای اثبات این مطلب، باید با توجه به درستی فرض، به درستی

حکم رسید.

$$x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow 2x - 3 > 4 - 3 \Rightarrow 2x - 3 > 1$$

مثال: ثابت کنید اگر $x > 1$ ، آن‌گاه $4 - x^2 < 3$.

حل:

فرض: $x > 1$

حکم: $4 - x^2 < 3$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < 4 - 1 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$$

اگر در مثال قبل، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ی

$$-4x - 18 < 2$$

۲. دو زاویه ی مجاور به قاعده ی یک مثلث با هم برابرند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی الساقین باشد.

اثبات بازگشتی

گاهی اوقات برای اثبات بعضی از مسئله ها، باید از یک فرض یا یک رابطه ی کاملاً بدیهی شروع کنیم. اما در برخورد اول با مسئله، ممکن است این رابطه ی بدیهی به ذهنمان نیاید. بنابراین با استفاده از درستی حکم و انجام اعمال ریاضی روی آن، سعی می کنیم به یک رابطه ی بدیهی برسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند. در غیر این صورت، درستی اثبات تأیید نمی شود.

مثال: با استفاده از اثبات بازگشتی، حکم های زیر را ثابت کنید:
الف) برای دو عدد حقیقی a و b ، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

ب) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$$

ج) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

د) برای عددهای حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq ab(a + b)$$

حل:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

الف)

دو طرف را در ۲ ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2b + 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2b - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، بنابراین آن را یک فرض بدیهی در نظر می گیریم و با بازگشت مراحل انجام شده، می توانیم به درستی حکم برسیم.

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 30z$$

ب)

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 - 4x + 2y - 30z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (9z^2 - 30z + 25) \geq 0$$

شرطی «اگر $x^2 < 3$ آن گاه $x > 1$ » به دست می آید. اکنون اگر با فرض درستی $x^2 < 3$ بتوان به درستی $x > 1$ رسید، در این صورت، عکس قضیه ی شرطی، یک قضیه ی شرطی است. در غیر این صورت، عکس قضیه ی شرطی، یک قضیه ی شرطی نیست.

$$4 - x^2 < 3 \Rightarrow 4 - x^2 - 4 < 3 - 4 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1$$

همان طور که ملاحظه می کنید، با فرض درستی $4 - x^2 < 3$ ، به $(x < -1)$ یا $(x > 1)$ رسیدیم و نتوانستیم فقط درستی $(x > 1)$ را ثابت کنیم. در نتیجه، عکس این قضیه ی شرطی برقرار نیست.

عکس قضیه ی شرطی

هرگاه $p \Rightarrow q$ یک قضیه ی شرطی باشد، چنانچه در این قضیه جای فرض و حکم را با هم عوض کنیم، گزاره ی $q \Rightarrow p$ به دست می آید. حال در صورتی که $q \Rightarrow p$ یک قضیه ی شرطی باشد، به آن قضیه ی شرطی عکس $p \Rightarrow q$ می گوئیم.

مثال: قضیه ی «اگر $x > -5$ ، آن گاه $-4x - 18 < 2$ » را در نظر بگیرید. آیا عکس آن، یک قضیه ی شرطی است؟

حل: ابتدا عکس قضیه ی شرطی را می نویسیم:

$$\text{«اگر } -4x - 18 < 2 \text{ آن گاه } x > -5\text{»}$$

$$-4x - 18 < 2 \Rightarrow -4x - 18 + 18 < 2 + 18$$

$$\Rightarrow -4x < 20 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{20}{-4} \Rightarrow x > -5$$

در نتیجه، عکس این قضیه ی شرطی برقرار است.

قضیه ی دوشرطی

اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو قضیه ی شرطی باشند، در این صورت می گوئیم p با q یک قضیه ی دوشرطی را تشکیل می دهند و می نویسیم $p \Leftrightarrow q$ و می خوانیم: « p شرط لازم و کافی برای q است» یا «شرط لازم و کافی برای p آن است که q » یا « p اگر و تنها اگر q ».

مثال: در این جا، دو قضیه ی دوشرطی آمده است:

۱. شرط لازم و کافی برای این که $x > -5$ آن است که

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 + (3z-5)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \quad (\text{ج})$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

(د)

$$a^2 + b^2 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \geq ab \quad (a+b > 0 \text{ چون})$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

برهان خلف

برای اثبات درستی یک حکم با روش برهان خلف، ثابت می کنیم که خلاف حکم نادرست است. برای این منظور، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱. فرض می کنیم که حکم مسئله درست نباشد (فرض خلف).
۲. نشان می دهیم که فرض خلف نتیجه ای به دست می دهد که خلاف فرض مسئله یا خلاف یکی از اصول یا قضیه های مسئله است که قبلاً پذیرفته ایم.

۳. در این مرحله به تناقض می رسیم. بنابراین فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

مثال: نشان دهید با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 مضرب ۳

باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

حل: برهان خلف

فرض می کنیم n مضرب ۳ نباشد (فرض خلف)، یعنی $n \neq 3k$

که $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین داریم:

$$n = 3k + 1 \text{ یا } n = 3k + 2; (k \in \mathbb{Z})$$

در حالتی که $n = 3k + 1$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k' + 1 \end{aligned}$$

در این حالت ملاحظه می کنیم که n^2 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در حالتی که $n = 3k + 2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k'' + 1 \end{aligned}$$

در این حالت نیز ملاحظه می کنیم که n^2 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در نتیجه، در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۵ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم n عدد صحیح و مضرب ۵ نباشد (فرض خلف)، بنابراین $n \neq 5k$ که $k \in \mathbb{Z}$ و داریم:

$$\begin{aligned} n &= 5k + 1 \text{ یا } n = 5k + 2 \text{ یا } n = 5k + 3 \text{ یا } n = 5k + 4 \\ &\text{یعنی } (k \in \mathbb{Z}); n = 5k + i \end{aligned}$$

اگر در هر یک از حالت های بالا مقدار n^2 را حساب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که n^2 مضرب ۵ نیست و این با فرض مسئله تناقض دارد. در نتیجه، در هر حالت به تناقض می رسیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم $\sqrt[3]{3}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\sqrt[3]{3}$ گویاست. یعنی:

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$$

حل مثال با برهان خلف

فرض کنیم $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ اول نباشد و عامل اول بزرگتر از p نداشته باشد (فرض خلف). در این صورت عدد N که بزرگتر از یک و طبیعی است، عامل اولی مانند p' دارد (نکته ۱). از طرف دیگر، عدد N عامل اول بزرگتر از p ندارد. بنابراین $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ و N بر p' بخش پذیر است (نکته ۲). یعنی: $N = p' \times q$ ($q \in \mathbb{Z}$) یا

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 = p' \times q \quad (1)$$

چون $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ ، بنابراین $(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p)$ بر p' بخش پذیر است. یعنی:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) = p' \times q' \quad (q' \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

با توجه به رابطه های ۱ و ۲ و نکته ۳ داریم:

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 &= p' \times q \\ (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) &= p' \times q' \\ \hline (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 - (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) &= p' \times (q - q') \\ &\quad q_1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = p' \times q_1$$

از رابطه ی اخیر می فهمیم که عدد ۱ بر عدد اول p' بخش پذیر است و این غیر ممکن است (تناقض). پس فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

برهان مستقیم

در قضیه ای به صورت $p \Rightarrow q$ ، به برهانی که با استفاده از درستی p نشان می دهد که q درست است، برهان مستقیم گوییم. استدلال استنتاجی و اثبات قضیه های شرطی، دو نوع از برهان های مستقیم اند.

برهان غیر مستقیم

به استدلال هایی مانند برهان خلف یا اثبات بازگشتی که در آن ها شیوه ی برهان مستقیم نیست، یعنی برهانی که حکم را به طور مستقیم از فرض نتیجه نگیریم، برهان غیر مستقیم گوییم.

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \Rightarrow p^3 = 3q^3$$

از برابری آخر نتیجه می گیریم که p^3 مضرب ۳ است، پس p نیز مضرب ۳ است، یعنی $p = 3k$ که $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p^3 = 3q^3 \\ p = 3k \end{cases} \Rightarrow (3k)^3 = 3q^3 \Rightarrow q^3 = 9k^3 = 3(3k^3) = 3k'^3 \quad \begin{matrix} k' \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

از این برابری نتیجه می گیریم که q^3 مضرب ۳ است، پس q مضرب ۳ است، یعنی $q = 3k_1$ که $k_1 \in \mathbb{Z}$. بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ هستند و این با فرض $(p, q) = 1$ در تناقض است. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ گنگ نباشد (فرض خلف). پس $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گویاست، یعنی:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - \sqrt{5} &= a, \quad a \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3} = a + \sqrt{5} &\Rightarrow (\sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{5})^2 \Rightarrow 3 = a^2 + 5 + 2a\sqrt{5} \\ \Rightarrow \sqrt{5} &= \frac{-a^2 - 2}{2a} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

در نتیجه $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ و این با گنگ بودن عدد $\sqrt{5}$ متناقض است. بنابراین به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر ۲، ۳، ۵ و... تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی p باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ یا اول است یا عامل اول بزرگتر از p دارد.

قبل از حل این مثال لازم است که نکته های زیر را مطرح کنیم: ۱. هر عدد طبیعی $n > 1$ یک عامل اول دارد، یا به عبارت دیگر بر یک عدد اول بخش پذیر است.

۲. هرگاه a و $b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، به طوری که a بر b بخش پذیر باشد، در این صورت یک عدد صحیح مانند q یافت می شود؛ به گونه ای که $a = b \times q$.

۳. هرگاه دو عدد صحیح a و b بر عدد صحیح c بخش پذیر باشند، در این صورت $a \pm b$ بر c بخش پذیر است.