

استدلال ریاضی

(قسمت ۱)

● میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم

درک شهودی

زندگی را بهتر بفهمیم و برای رسیدن به نتیجه، حدس‌هایی بزنیم. برای اثبات این حدس‌ها به ابزار قوی‌تری نیاز داریم و آن، انواع استدلال‌های ریاضی است.

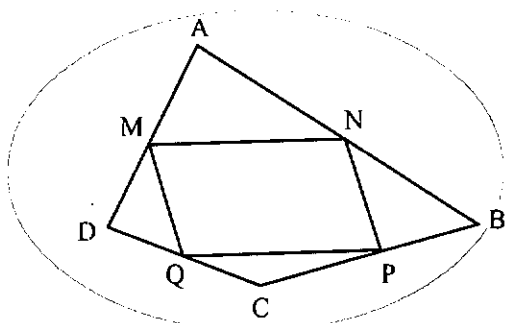
انسان به طور فطری، همواره برای درک اتفاق‌های پیرامون خود از شهودش کمک می‌گرفته، اما نکته‌ی مهم این است که شهود افراد گوناگون در زمان‌های متفاوت یکسان نبوده است.

برای مثال در یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، شهودشان با بقیه‌ی مردم متفاوت بود و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن‌ها با شهود خود، تنها به دلیل این که می‌دیدند «وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دور دست به ساحل نزدیک می‌شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه‌ی آن بر ساحل نشینان آشکار می‌شود»، به این باور رسیده بودند. پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح

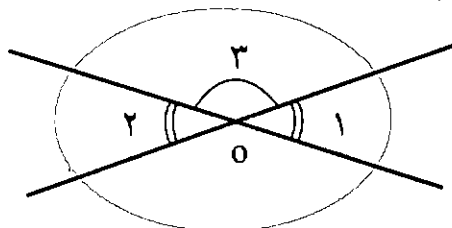
سه لیوان آب با دماهای متفاوت را در اختیارتان قرار می‌دهند و از شما می‌خواهند آن‌ها را به ترتیب صعودی دمایشان مرتب کنید. بی‌درنگ سه انگشت متفاوت خود را به ترتیب در هر لیوان فرو می‌برید، درجه حرارت هر کدام را حدس می‌زنید و سپس آن‌ها را مرتب می‌کنید.

برای انجام این آزمایش، در حقیقت از حس لامسه‌ی خود کمک گرفته‌اید. این گونه ادراک از محیط پیرامون خود را که به کمک یکی از حواس پنج‌گانه به دست می‌آید، درک شهودی می‌نامیم. اگر در این آزمایش از شما می‌خواستند دمای آب هر لیوان را به طور دقیق بگویید، به ابزار قوی‌تری مانند دماسنج نیاز داشتید.

درک شهودی، نوعی استدلال دقیق ریاضی به حساب نمی‌آید، بلکه به ما کمک می‌کند تا مسائل ریاضی یا روزمره‌ی



تحصیلات و حتی نوع کار آن‌ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت‌های چشم‌گیری دارد. مثال: برای اثبات این حکم که «دو زاویه‌ی متقابل به رأس با یکدیگر برابرند»، ابتدا شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم و بعد از فهم درست حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.



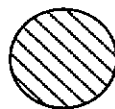
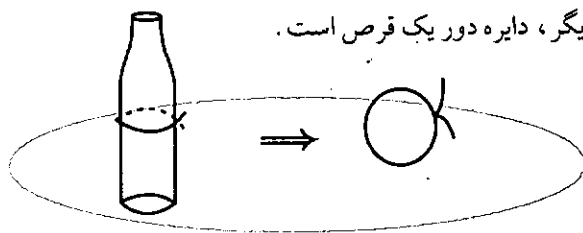
هر زاویه‌ی نیم صفحه برابر با 180° است، پس داریم:

$$\begin{cases} \angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ \\ \angle O_2 + \angle O_3 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle O_1 + \angle O_2 = \angle O_2 + \angle O_3 \Rightarrow \angle O_1 = \angle O_3$$

توجه: واقعاً بدون استفاده از شکل و درک شهودی، اثبات این حکم جذاب و قابل فهم نیست.

مثال: برای این که درک درستی از تعریف دایره پیدا کنیم، بهتر است قطعه‌ای سیم مفتولی را برداریم و آن را دور یک بطری قرار دهیم و دو سر سیم را به هم ببندیم. سپس بطری را از داخل سیم بیرون می‌آوریم و شکل به دست آمده را یک دایره می‌نامیم.

با انجام این کار، دانش‌آموزان تفاوت بین دایره و قرص (دیسک) را متوجه می‌شوند. درحقیقت یک قرص، از یک دایره به همراه نقاط داخلش تشکیل شده است. به عبارت دیگر، دایره دور یک قرص است.

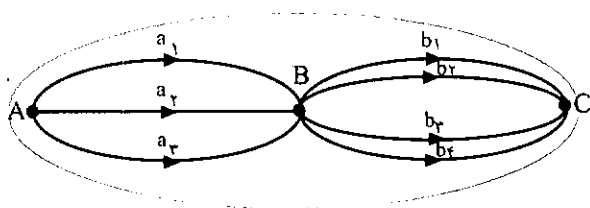


قرص یا دیسک

توجه: به خط بسته‌ای که دور قرص قرار دارد، دایره گفته می‌شود.

مثال: برای اثبات این حکم که: «اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، آن‌گاه یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود»، ابتدا شکلی به این صورت رسم می‌کنیم و بعد از درک درستی حکم از روی شکل، برای آن استدلال دقیق می‌آوریم.

مثال: برای حل این مسأله که: «از شهر A به شهر B، ۳ راه و از شهر B به شهر C، ۴ راه متفاوت وجود دارد. هرگاه شخصی قصد سفر از شهر A و از طریق شهر B به شهر C را داشته باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟» ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم، سپس با استفاده از اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، جواب مسئله را به دست می‌آوریم.



با استفاده از اصل ضرب می‌توان نوشت: $3 \times 4 = 12$. پس ۱۲ راه متفاوت وجود دارد که آن‌ها را به این صورت مشخص می‌کنیم:

a_1, b_1 a_2, b_1 a_3, b_1
 a_1, b_2 a_2, b_2 a_3, b_2
 a_1, b_3 a_2, b_3 a_3, b_3
 a_1, b_4 a_2, b_4 a_3, b_4

مثال: دو عدد صحیح مثبت را چنان بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۱۲ و حاصل ضربشان بیش‌ترین مقدار ممکن باشد. حل: ابتدا با استفاده از شهود، سعی می‌کنیم جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن‌ها برابر با ۱۲ باشد. سپس حاصل ضرب هر کدام را پیدا می‌کنیم. از بین این حاصل ضرب‌ها، هر کدام که از بقیه بیش‌تر باشد، دو عدد مربوط به آن، جواب مسئله هستند.

$1+11=12$; $1 \times 11=11$ $4+8=12$; $4 \times 8=32$
 $2+10=12$; $2 \times 10=20$ $5+7=12$; $5 \times 7=35$
 $3+9=12$; $3 \times 9=27$ $6+6=12$; $6 \times 6=36$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب‌های بالا ملاحظه می‌کنیم، هرچه اختلاف دو عدد کم‌تر می‌شود، حاصل ضربشان بیش‌تر می‌شود، تا آن‌جا که وقتی هر دو عدد برابر با

۶ باشند، حاصل ضربشان بیشترین مقدار را دارد. بنابراین، به روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، برابرند با: $x = y = \frac{a}{2}$ »

می‌توان حدس بالا را به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = a \Rightarrow y = a - x \\ P = xy \end{cases} &\Rightarrow P = x(a - x) \\ \Rightarrow P = x(a - x) = -x^2 + ax = -(x^2 - ax) \\ &= -(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$P = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \quad (1)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱ درمی‌یابیم، بیشترین مقدار P وقتی به دست می‌آید که: $(x - \frac{a}{2})^2 = 0$. بنابراین داریم:

$$x - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad (2)$$

از طرفی $x + y = a$ ؛ پس با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم که $y = \frac{a}{2}$. در نتیجه، وقتی P بیشترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x = y = \frac{a}{2}$$

استدلال تمثیلی

برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها یا نتیجه‌گیری‌ها در زندگی روزمره، از یک ضرب المثل یا یک بیت شعر استفاده می‌کنیم که مشابهتی با رویداد پیش آمده دارد. برای مثال: اگر بخواهیم کسی را به صبر و حوصله تشویق کنیم، می‌گوییم: گر صبر کنی ز غوره حلوا سازی! اگر دیگران شرایط فردی را درک نکرده و نتیجه‌گیری نادرستی از عملکرد او داشته باشند، می‌توان به آن‌ها گفت:

هر کسی از ظن خود شد یار من

از درون من نجست اسرار من

وقتی مبحث آمار را مطالعه می‌کنیم، برای تفهیم این موضوع که یک نمونه تصادفی همه‌ی خاصیت‌های جامعه‌ی آماری را دارد، از ضرب المثل «مشت نمونه‌ی خروار است»، پس نمونه بیانگر جامعه است، استفاده می‌کنیم.

استدلال تمثیلی یا مقایسه‌ای، در حقیقت یافتن نوعی مشابهت بین دو یا چند مفهوم است. به عبارت دیگر، اساس استدلال تمثیلی، نوعی شباهت است.

تذکر: استدلال تمثیلی، نوعی استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا محدودیت‌هایی دارد. این نوع استدلال فقط در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به ما کمک می‌کند.

مثال: وقتی از دانش‌آموز می‌خواهیم به جای $\square$ در برابری

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{\square}$$

این است که چون صورت کسر سه برابر شده است، پس مخرج هم مشابه صورت باید سه برابر شود تا این که تناسب برقرار باشد. در نتیجه، به جای $\square$ عدد $6 \times 3 = 18$ را قرار می‌دهد.

مثال: برای هر عدد طبیعی n و عدد حقیقی $a \neq 0$ ، داریم:

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. مشابه با این فرمول، وقتی n عدد طبیعی نباشد، از این فرمول هم استفاده می‌شود. برای مثال، با فرض $a \neq 0$ داریم:

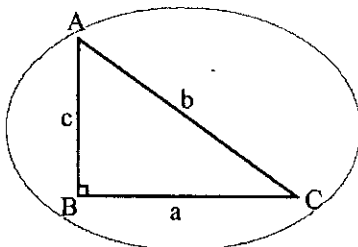
$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n}}$$

توجه: برای محاسبه‌ی حاصل عبارت‌های جبری به کمک اتحاد، از استدلال تمثیلی استفاده می‌کنیم!

مثال: همه‌ی دانش‌آموزان با مثلث قائم الزاویه و رابطه‌ی فیثاغورس در آن از دوره‌ی راهنمایی آشنا هستند. رابطه‌ی فیثاغورس چنین است:

در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

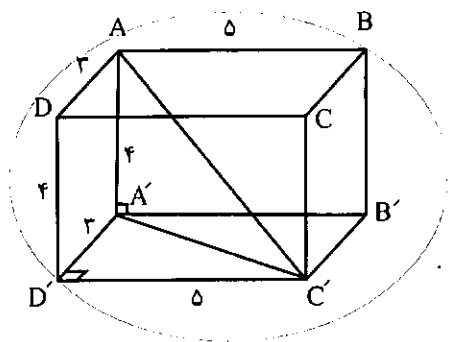


با استفاده از این رابطه و به کمک استدلال تمثیلی، می‌توان قطر مکعب مستطیل را محاسبه کرد. فرض کنید مکعب

مستطیلی به ابعاد ۳، ۴ و ۵ داریم و می‌خواهیم قطر آن را محاسبه کنیم:

چون مثلث $A'D'C'$ در رأس D' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن، به کمک استدلال تمثیلی، چنین نوشت:

$$A'C'^2 = A'D'^2 + D'C'^2 \Rightarrow A'C'^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ \Rightarrow A'C' = \sqrt{25} = 5$$



هم چنین مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را برای آن به کمک استدلال تمثیلی چنین نوشت:

$$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 \Rightarrow AC'^2 = 4^2 + (5)^2 = 41 \\ \Rightarrow AC' = \sqrt{41}$$

استدلال استقرایی

برخی از ریاضی دانان بزرگ، وقتی به درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می‌بردند، آن را به صورت یک حکم کلی بیان می‌کردند. از این رو، تا میانه‌های قرن هفدهم میلادی، با استفاده از استدلال استقرایی، حکم‌های بسیاری در ریاضیات، به ویژه در شاخه‌ی نظریه‌ی اعداد روی هم انباشته شده بودند که یک نمونه را ذکر می‌کنیم:

مارن مرسن (۱۶۴۸-۱۵۸۸م)، ریاضی دان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود، عدد $M_n = 2^n - 1$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n ، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می‌آیند:

$$n = 2 \Rightarrow M_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow M_3 = 2^3 - 1 = 7$$

$$n = 5 \Rightarrow M_5 = 2^5 - 1 = 31$$

$$n = 7 \Rightarrow M_7 = 2^7 - 1 = 127$$

$$n = 13 \Rightarrow M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$$

:

$$n = 257 \Rightarrow M_{257} = 2^{257} - 1$$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد، $M_{67} = 2^{67} - 1$ و $M_{257} = 2^{257} - 1$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{61} = 2^{61} - 1$ و $M_{89} = 2^{89} - 1$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضی دانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند، زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجه‌ی کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی، به طور معمول، با مقایسه‌ی مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌هایی محدود آغاز می‌شود. سپس نتیجه‌ی این آزمایش‌ها را به همه‌ی پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود، زیرا مجموعه‌ی مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همه‌ی پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت زیر را با روش استدلال استقرایی حدس بزنید:

$$A = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$$

ابتدا مجموع جملات را محاسبه می‌کنیم:

$$n = 1: 2 = 2 \times 1 = 2 \times (1^2)$$

$$n = 2: 2 + 6 = 8 = 2 \times 4 = 2 \times (2^2)$$

$$n = 3: 2 + 6 + 10 = 18 = 2 \times 9 = 2 \times (3^2)$$

$$n = 4: 2 + 6 + 10 + (4 \times 4 - 2) = 32 = 2 \times 16 = 2 \times (4^2)$$

در حالتی که $n = 5$ ، می‌توان حدس زد که مجموع پنج

جمله‌ی عبارت A برابر با $2 \times (5^2)$ یا ۵۰ است؛ زیرا:

$$n = 5: 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 = 2 \times 25 = 2 \times (5^2)$$

بنابراین، هرگاه مجموع n جمله‌ی عبارت A را محاسبه

کنیم، حاصل آن $2 \times (n^2)$ است؛ یعنی داریم:

$$A = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2 \times (n^2) \quad (1)$$

برای آن که درستی حدس خود را ثابت کنیم، باید ابتدا اصل

استقرای ریاضی را مطالعه کنیم. سپس با استفاده از آن، درستی رابطه‌ی ۱ را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$۷۴ \times ۳ = ۲۲۲$$

$$۷۴ \times ۶ = ۴۴۴$$

الف) بدون محاسبه، حاصل سطر زیر را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$$۷۴ \times ۱۲ =$$

ب) آیا حدس شما درست بود؟

ج) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

د) حاصل سطر زیر را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید.

$$۷۴ \times ۲۴ =$$

هـ) آیا حدس شما درست بود؟

و) از قسمت‌های بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

الف) چون ۲۲۲ دو برابر ۴۴۴ است، پس حاصل ۷۴×۱۲ ، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۴۴۴ ، یعنی ۸۸۸ است.

ب) بله، زیرا:

$$\begin{aligned} ۷۴ \times ۱۲ &= ۷۴ \times (۶ \times ۲) = (۷۴ \times ۶) \times ۲ \\ &= ۴۴۴ \times ۲ = ۸۸۸ \end{aligned}$$

ج) استدلال استقرایی، زیرا براساس مجموعه‌ای از مشاهدات جزئی به نتیجه‌ای کلی رسیدیم.

د) مانند پاسخ مرحله‌ی الف، حاصل ۷۴×۲۴ ، عددی است که هر رقم آن دو برابر رقم‌های ۸۸۸ یعنی ۱۶۱۶۱۶ است.

هـ) خیر، زیرا:

$$\begin{aligned} ۷۴ \times ۲۴ &= ۷۴ \times (۱۲ \times ۲) = (۷۴ \times ۱۲) \times ۲ \\ &= ۸۸۸ \times ۲ = ۱۷۷۶ \end{aligned}$$

و) استدلال استقرایی براساس مجموعه‌ای محدود از مشاهدات است؛ بنابراین استدلال دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حدس ما برای مرحله‌ی «د» درست نیست.

فعالیت ۲: به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید:

$$۲۰۳ \times ۱۲۲ = ۲۴۷۶۶$$

$$۲۲۱ \times ۳۰۲ = ۶۶۷۴۲$$

الف) حاصل ۳۱۲×۱۲۱ را به دست آورید.

ب) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را حدس بزنید.

ج) حاصل ۲۱۳×۱۲۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

د) حاصل ۲۱۴×۱۳۲ را به دست آورید.

هـ) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را حدس بزنید.

و) حاصل ۴۱۲×۲۳۱ را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟ توضیح دهید.

فعالیت ۳: در الگوی زیر، حاصل سطر چهارم را حدس بزنید. برای حدس خود از چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟

$$\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۲۱} = ۱۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} = ۱۱۱۱$$

$$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} = ?$$

فعالیت ۴: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$۳۷ \times ۱۸ = ۶۶۶$$

$$۳۷ \times ۲۱ = ۷۷۷$$

$$۳۷ \times ۲۴ = ۸۸۸$$

$$۳۷ \times ۲۷ = ?$$

$$۳۷ \times ۳۰ = ?$$

الف) مقدار سطر چهارم را بدون محاسبه حدس بزنید.

ب) با چه نوع استدلالی حدس زده‌اید؟

پ) حاصل سطر چهارم را به دست آورید. آیا حدس شما درست بود؟

ت) حاصل سطر پنجم را ابتدا حدس بزنید و سپس مقدار آن را به دست آورید.

آیا حدس شما درست بود؟ چرا؟

فعالیت ۵: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$۶۱ \times ۲ = ۱۲۲$$

$$۶۱ \times ۴ = ۲۴۴$$

$$۶۱ \times ۸ = ?$$

$$۶۱ \times ۱۶ = ?$$

الف) بدون محاسبه، سطر سوم الگو را حدس بزنید.

ب) مقدار سطر سوم را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ) از کدام استدلال برای حدس مقدار سطر سوم استفاده کرده‌اید؟

ت) حاصل سطر چهارم را حدس بزنید، سپس مقدار آن را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

ادامه دارد...