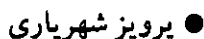


(از: ا.ای. والودارسکی)



بی‌تردید، اخترشناسی هندی، برنوشته‌های دانشمندان

۷۷	۷۷۷	۷۷۷	۷۷۷	۷۷۷	۷۷۷	۷۷۷
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲
۷۷۷۷	۷۷۷۷	۷۷۷	۷۷۷	۷۷	۷	۷
۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰
۷۷۷۷۷۷	۷۷۷۷	۷۷۷	۷۷	۷	۷	۷
۲۷۴	۱۲۲	۳	۲۰۰	۱۰۰		

عدد نویسی کهاروشتا

نوشته می‌شد و دهگانها به یاری نمادهای ۱۰ و ۲۰، برای صدگان از قانون ضرب استفاده می‌کردند؛ یعنی نماد صد را می‌گذاشتند و در سمت راست آن، تعداد صدهای لازم را قرار می‌دادند. دستگاه شماری که براساس ضرب تنظیم شده باشد، به دستگاه موضعی نزدیکتر است تا دستگاهی که بر اساس قانون جمع شکل گرفته است.

تقریباً در سده ششم پیش از میلاد، در کنار رقمهای کهاروشتا، دستگاه عددنویسی دیگری هم به نام «برهما» به صورتی گسترده به کار می‌رفت. رقمهای برهما، در مقایسه با رقمهای کهاروشتا، دو ویژگی متفاوت داشت:

۱. از چپ به راست نوشته می‌شد.
۲. اگر در عدد نویسی چهاروشتا، تنها ۵ نماد وجود داشت، رقمهای برهما برای واحد، ده، صد و هزار، نمادهای ویژه‌ای داشتند و در ضمن، عددهای ۴، ۵، ۸ و ۱۰ را با دو نماد مشابه نشان می‌دادند. در عدد نویسی برهما، با آغاز از صد، قانون ضرب را به کار می‌بردند.

7	5.7	7	7	85	78	≡	=	-
9	8	7	6	0	7	7	7	1
77	1	7	7	7	0	α.α		
Δ ⁰⁰	7 ⁰⁰	1 ⁰⁰	7 ⁰	7 ⁰	7 ⁰			
77	91	97	7	7	9			
70,000	8000	7000	7000	7000	1000			

عدد نویسی برهما

و دینی، به «سانسکریت» می‌نوشتند. نقش زبان سانسکریت در هند، شبیه نقشی بود که زبان لاتینی در اروپای غربی سده‌های میانه داشت. موضوعهای ریاضی، اغلب کوتاه و بدون استدلال نوشته می‌شد. بسیاری از نوشته‌های ریاضی، به نظم درمی‌آمد و به صورت شعر ثبت می‌شد.

آگاهیهای زیادی از ریاضیات هندی در کتاب «قانون طنباها» (۵۰۰ تا ۷۰۰ سال پیش از میلاد) آمده است و در آن، از برخی ساختمانهای هندسی و نمونه‌هایی از بعضی محاسبه‌ها، جمع‌آوری شده است. بقیه نوشته‌های هندی، مربوط به سده‌های پنجم تا شانزدهم میلادی است و در بسیاری از آنها، باید بخشهای مربوط به ریاضیات را، در بین نوشته‌های اخترشناسی یافت.

دستگاه قدیمی شمار

این مطلب روشن شده است که دستگاه عددنویسی دهدهی (که بر پایهٔ موضعی بودن رقمها تنظیم شده است) در هند به درجهٔ کمال خود رسید. ولی مسأله‌های مربوط به دستگاه شمار کهتر هندی و اثری که در پیدایش دستگاه موضعی دهدهی داشته، کمتر روشن شده است.

در هند قدیم، دستگاه شمار غیرموضعی (نمادهای «کهاروشتا» و «برهما» دستگاه شمار لفظی و دستگاه شمار الفبایی) و همچنین، دستگاه شمار موضعی وجود داشته است. ویژگی دستگاه‌های شمار هندی در این است که اغلب با مبنای ۱۰ کار می‌کرده‌اند. ویژگی دیگر آن، در تکامل نامگذاری توان ۱۰ است. در زمانی که در یونان نامی برای بالاتر از $۱۰^۴$ (میریاد) و در روم برای بالاتر از $۱۰^۳$ (میل) نداشتند، در هند عددهای تا $۱۰^{۲۰}$ را نامگذاری کرده بودند.

به بررسی دستگاه‌های شمار غیر موضعی پردازیم

رقمهای کهاروشتا در بسیاری نوشته‌ها که در شرق افغانستان امروزی و شمال پنجاب به‌دست آمده، به کار رفته است. این نوشته‌ها مربوط به سده چهارم پیش از میلاد تا سده سوم میلادی است. در این دستگاه غیر موضعی دهدهی، برای هر یک از عددهای ۱، ۴، ۱۰، ۲۰ و ۱۰۰، نمادهایی وجود دارد و عددها از راست به چپ نوشته می‌شوند.

یکانها بر اساس قانون جمع و به یاری نمادهای ۱ و ۴

ریاضی و اخترشناسی استفاده می‌کردند. استفاده از دستگاه لفظی، بسیار عمومی بود و امروز هم، کم و بیش آن را به کار می‌برند. ماده تاریخها را، اغلب از راست به چپ می‌نوشتند؛ گرچه گاه و از جمله در رساله «باهشالیسکا» (سده‌های ششم تا هشتم میلادی) عددها را از چپ به راست نوشته‌اند. با آغاز سده‌های چهارم و پنجم میلادی، دستگاه شمار لفظی به صورت موضعی درآمد و در آن، هر رقم (یعنی هر واژه) بسته به موضع خود، معنای مختلفی داشت؛ در ضمن، از بیان مرتبه‌ها هم خودداری می‌شد. در کنار واژه‌هایی که به معنای رقم‌های مختلف بودند، از واژه‌هایی هم برای بیان صفر، به صورتی گسترده استفاده می‌شد.

نمونه‌هایی از نوشتن عدد را، با استفاده از دستگاه عددشماری موضعی لفظی می‌آوریم:

۱۲۳۰: آسمان (۰) - زمانها (۳) - لبها (۲) - زمین (۱)؛
۳۲۵۱۰۸: خدایان (۸) - آسمان (۰) - زمین (۱) - تیرها (۵) - لبها (۲) - زمانها (۳).

از دشواریهای دستگاه موضعی لفظی هندیها، این بود که برای نوشتن عددهای بزرگ، به جای زیادی نیاز داشتند، و این، برخلاف میل دانشمندان بود که می‌خواستند موضوعهای مربوط به دانش را، تا جایی که ممکن است کوتاه و فشرده بنویسند. به همین دلیل، برای تغییر دستگاه لفظی، در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی، دستگاه‌شمار الفبایی پدید آمد. البته هندیها، از دستگاه الفبایی، مثل یونانیها و دیگران، در همه جا استفاده نمی‌کردند و تنها در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی به کار می‌بردند. در ضمن، دستگاه الفبایی شمار هم چندگونه بود؛ یکی از آنها شامل ۱۶ حرف صدادار و ۳۴ حرف بی‌صدای الفبای سانسکریت است؛ به این ترتیب که ۳۴ حرف بی‌صدا با نخستین حرف صدادار، معرف عددهای از ۱ تا ۳۴، همان ۳۴ حرف بی‌صدا با دومین حرف صدادار، نماینده عددهای از ۳۵ تا ۶۸ و غیره بود. بنابراین، عددها به صورت:

$$34(n-1) + m$$

بودند که در آن، n شماره ردیف حرفهای صدادار و m شماره ردیف حرفهای بی‌صداست. برای نمونه ۳=گا («گ» حرف سوم بی‌صدا و «ا» حرف اول صدادار است)؛ ۱۴۲=چو («ج» حرف ششم بی‌صدا و «و» حرف پنجم صدادار).

عدد نویسی برهما، نزدیک به هزار سال، بدون تغییر به کار می‌رفت، نمادهای نه‌گانه برای ۹ عدد طبیعی نخستین، دست‌کم از سده دوم پیش از میلاد، در بسیاری جاها وجود داشته است؛ ولی این نمادها، اغلب با توجه به قانون جمع به هم مربوط بودند. وجود نمادهای ویژه را برای عددهای از ۱ تا ۹، که یکی از ویژگیهای مهم در حساب هندی است، باید سرآغاز پیدایش عددنویسی دهمی دانست.

دستگاه شمار لفظی، در هیچ کشوری به اندازه هند، به طور گسترده به کار نمی‌رفت. در این جا رقمها، با واژه‌های مختلف بیان می‌شد؛ واحد را با واژه‌هایی بیان می‌کردند که معرف یک چیز واحد و یگانه بود؛ مانند ماه یا زمین. «دو» را با نام چیزی بیان می‌کردند که همیشه با یک زوج از آنها برخورد می‌کنیم؛ مانند چشمها، لبها و غیره. ثبت عددها به این گونه، به غنای زبان سانسکریت و به ذخیره واژه‌های آن از جهت مترادفهای بسیار، کمک فراوان کرد. برای نمونه، برای «آسمان» ۹ واژه مختلف و برای «زمین» ۱۱ واژه مختلف داشتند. در این جا برخی واژه‌ها را که برای عدد به کار می‌بردند، می‌آوریم:

۰. تهی، آسمان، سوراخ، بی‌مرز (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱. آغاز، ماه، زمین، بدن، برهمن (بیش از ۳۹ واژه)؛
۲. همزاد، چشمها، لبها، زوج (بیش از ۳۰ واژه)؛
۳. هدفها، آشتیها، زمانها، آتش (بیش از ۲۶ واژه)؛
۴. دریاها، دورانهای صلح، مرحله‌های زندگی، بخشهای عالم (بیش از ۲۹ واژه)؛
۵. تیرها، عنصرها، اندامهای حسی، قهرمانان افسانه‌ای، مهابهارات (بیش از ۹ واژه)؛
۶. مزه‌ها، رنگها، بخشهای بدن (بیش از ۱۶ واژه)؛
۷. کوه‌ها، دانشمندان (بیش از ۲۸ واژه)؛
۸. خدایان، مارها، آرشها (بیش از ۲۶ واژه)؛
۹. الاهیها (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱۰. انگشتان، مظهرهای خدای ویشنا (بیش از ۱۰ واژه).

برای این که دستگاه لفظی را خوب بشناسیم، باید با فلسفه، ادب، اسطوره‌ها و افسانه‌های هندی آشنا باشیم. البته عملهای حساب را نمی‌توان به وسیله دستگاه عدد شماری لفظی انجام داد؛ از آنها تنها برای نوشتن عددها در رساله‌های

نمونه «شریدهارا» (سده‌های نهم و دهم میلادی)، عامل دوم ضرب را به ترتیب در یکان، دهگان، صدگان و هزارگان عامل اول، ضرب و سپس نتیجه‌ها را با هم جمع می‌کرد. مثال:

$$1296 \times 21 = (1000 + 200 + 90 + 6) \times 21 \\ = 21000 + 4200 + 1890 + 126 = 27216$$

«بهاسکارا»ی دوم (سده دوازدهم میلادی) برای ساده‌تر کردن کار، یکی از عاملهای ضرب را به صورت مجموع یا تفاضل درمی‌آورد:

$$135 \times 12 = 135(12 + 8) - 135 \times 8; \\ 135 \times 12 = 135(12 - 2) + 135 \times 2$$

برای تقسیم، شییه راهی که امروز معمول است، عمل می‌کردند.

از آن جا که ضمن عملهای حسابی، اغلب، عمل بینایی را پاک می‌کردند، نمی‌شد به طور مستقیم، درستی نتیجه را آزمایش کرد. برای آزمایش درستی نتیجه ضرب، تقسیم، توان و ریشه، به عمل وارون آن متوسل نمی‌شدند؛ بلکه از قاعده معروف به ۹، استفاده می‌کردند. این آزمایش بر این اساس است که باقیمانده حاصل از تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده حاصل از تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. روشن است، «قاعده ۹» برای آزمایش درستی عمل کافی نیست و باید آن را با روش دیگری هم آزمایش کرد.

کسر از خیلی قدیم، در هند شناخته شده بود. در رساله «قانون طنابها» هم (که به سده‌های هفتم تا پنجم پیش از میلاد مربوط می‌شود) کسرها را به صورتی نوشته‌اند که با نمادهای امروزی شباهت زیادی دارد؛ مخرج کسر زیر صورت آن نوشته شده است، البته بدون خط کسری. هر کسر را از کسر دیگر، به وسیله خطهای راست افقی و قائم از هم جدا می‌کردند؛ نمادی برای جمع وجود نداشت و کسرها را برای جمع کردن به دنبال هم می‌نوشتند. مجموع $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ به این صورت نوشته می‌شد:

a	c	e
b	d	f

برای نماد تفريق، از نقطه یا علامتی شبیه یک صلیب کوچک استفاده می‌کردند. عبارت $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$ به این صورت

دستگاه عددنویسی دهدهی موضعی هندیها، با چند شرط پذیرفته شده بود:

۱. نوشتن شکل ضربی مقدار ردیف در عدد؛
 ۲. حذف علامت واحد ردیف؛
 ۳. به کار بردن نماد صفر، برای ردیف‌های خالی؛
 ۴. پذیرفتن عدد ۱۰، به عنوان مبنای دستگاه‌شمار.
- همه این شرطها، در سده‌های نخستین میلادی، در دستگاه‌های عددنویسی رعایت می‌شد. به این ترتیب، به هر صورتی که در نظر بگیریم، دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی، در دوره‌ای که از سده ششم میلادی تجاوز نمی‌کند، در هند پدید آمده بود.

حساب

همان‌طور که بیشتر موضوعها، در دوره مقدماتی هندسه امروزی، از طرحی پیروی می‌کند که اقلیدس ریخته است، حساب و بخشی از جبر ما، از هند سرچشمه گرفته است. در حساب و برای عددهای درست و کسری، هشت عمل اساسی وجود دارد: جمع، تفريق، ضرب، تقسیم، به توان رساندن، ریشه دوم گرفتن، به توان ۳ رساندن، ریشه سوم گرفتن. درباره توانایی محاسبه دانشمندان هندی، حقیقتی است که آنها، محاسبه ریشه سوم عددها، از عملهای عادی به شمار می‌رفت؛ در حالی که در اروپای غربی سده‌های میانه، کسی که می‌توانست توان دوم عددی را پیدا کند، ارج بسیار داشت.

محاسبه را روی صفحه‌ای که از ماسه یا خاک نرم پوشیده بود، انجام می‌دادند. عددها را با یک تکه چوب می‌نوشتند و برای این که عددها به هم نیامیزند و از یکدیگر جدا باشند، آنها را با اندازه‌های به اندازه کافی بزرگ در نظر می‌گرفتند؛ بنابراین، برای به دست آوردن نتیجه محاسبه، ناچار بودند عملهای بینایی را پاک کنند، و همه اینها در روش محاسبه اثر می‌گذاشت. عمل جمع را می‌توانستند، هم از راست به چپ، با آغاز از مرتبه کوچکتر، و هم از چپ به راست، با آغاز از مرتبه بزرگتر انجام دهند.

برای ضرب، روش مختلفی وجود داشت؛ ضرب را می‌شد از مرتبه کوچکتر یا از مرتبه بزرگتر آغاز کرد. بجز روش کلی ضرب، راه‌های ویژه‌ای هم وجود داشت، برای

درمی آمد:

a	c	+e
b	d	f

در کسر مرکب، بخش درست را روی کسر جا می دادند؛
کسر مرکب $a \frac{b}{c}$ را به این صورت می نوشتند:

a
b
c

گاهی عدد درست کسر مرکب را، با کسری که مخرجی
برابر واحد داشت، نشان می دادند:

a	b
۱	c

یعنی $\frac{a}{1} + \frac{b}{c}$ که همان کسر مرکب $a \frac{b}{c}$ می شود. برای
ضرب، کسرها را پشت سرهم می نوشتند، شبیه جمع:

a	c
b	d

و برای تقسیم، یکی را زیر دیگری:

a	a
b	b
c	c
d	d

یا

قاعده عمل با کسر، تقریباً تفاوتی با امروز ندارد. قاعده جمع
کسرها به وسیله شریدها، این گونه شرح داده شده است:
«کسرها را به یک مخرج تبدیل کنید، سپس صورتها را جمع
کنید.» و برای قاعده ضرب: «صورتها را ضرب و بر
حاصلضرب مخرجها تقسیم کنید تا حاصلضرب دو یا چند
کسر به دست آید.»

به عنوان مخرج مشترک، در آغاز، حاصلضرب مخرجها را
در نظر می گرفتند؛ ولی از آغاز سده نهم میلادی، کوچک ترین
مضرب مشترک مخرجها را پیدا می کردند. شریدها را
می نویسد: «برای این که دو کسر را با یک مخرج بنویسیم، در
آغاز عامل مشترک دو مخرج را کنار می زنیم (اگر چنین عاملی
وجود داشته باشد)، سپس عددی را که در هر مخرج می ماند،
در صورت و مخرج کسر دیگر ضرب می کنیم.»

قاعده سه مقدار، پنج مقدار و غیره، وارون قاعده سه
مقدار، مسأله های مربوط به «اختلاط» و «امتزاج» درصد و
تقسیم به نسبت، جای مهمی را در حساب هندی داشتند.
یونانیها و مصریها هم قاعده سه مقدار را به کار می بردند؛ ولی
هندیها آن را همچون قانونی از حساب در نظر می گرفتند و از
آن، به عنوان روشی برای حل، استفاده می کردند.

«قاعده سه مقدار» عبارت است از جست و جوی عدد x ، به
شرطی که با سه عدد داده شده a ، b و c تشکیل یک تناسب
بدهد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

یک راه حل غیرعادی هم معمول بود. اگر مسأله ای منجر به
حل معادله

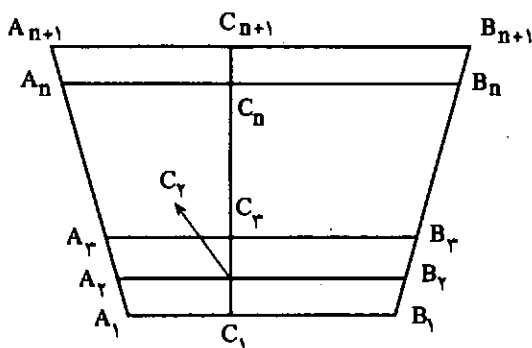
$$ax = c$$

می شد، پاسخ را به این صورت می نوشتند:

$$x = x_1 \cdot \frac{c}{c_1}$$

که در آن، x_1 عددی است دلخواه و c_1 مقدار متناظری است
که از قرار دادن x_1 در معادله، برای c به دست می آید.

ریاضیدانان هندی، مسأله های مربوط به تصاعدهای
حسابی و هندسی را حل می کردند؛ در ضمن، «شریدها»،
تعبیر هندسی تصاعد حسابی را به صورت ذوزنقه
متساوی الساقینی که ارتفاع آن برابر تعداد جمله های تصاعد
است، داده است (شکل را ببینید). مساحت ذوزنقه
 $A_1 A_2 B_2 B_1$ ،



که ارتفاعی برابر واحد دارد ($|c_1 c_2| = 1$)، عددی است برابر
با جمله اول تصاعد یعنی a ؛ مساحت ذوزنقه $A_1 A_2 B_2 B_1$ ، که
ارتفاعی برابر ۲ واحد دارد ($|c_1 c_2| = 2$)، برابر است با