



آگاهی‌هایی دربارهٔ ریاضیات محاسبه‌ای در چین باستان (از: ای. برزکینا)

سالی که «سیمون سته‌ون» (۱۵۴۸ - ۱۶۲۰)، کتاب خود را منتشر کرد، می‌دانند. از این زمان، کسرهای دهدهی به طور جدی وارد ریاضیات شد و در دسترس هر کسی که به تحصیل مدرسه‌ای مشغول بود، قرار گرفت.

در دهه‌های اخیر، آگاهی‌های تازه و جالبی دربارهٔ تاریخ کسرهای دهدهی به دست آمده است. ضمن بررسی یکی از رساله‌های کهن چینی، یعنی «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» که به نزدیک‌های سدهٔ سوم میلادی مربوط می‌شود، روشن شده است که در آن زمان، کسرهای دهدهی را می‌شناخته‌اند. و این خیلی دیرتر از زمانی است که به طور معمول از کاربرد کسرهای دهدهی سخن می‌گویند. از نویسندهٔ این رساله اطلاعی نداریم. رساله یک بخش از ده بخش کتابی است که در مجموعهٔ «ده کتاب ریاضی» در عصر «تان» (سده‌های هفتم تا نهم میلادی) وارد شده است. این مجموعه به عنوان کتاب درسی تنظیم شده بود. در کتابهای تاریخ ریاضیات، اغلب سال پدید آمدن کسرهای دهدهی را ۱۵۸۵ میلادی، یعنی

با بررسی تاریخ، این هم روشن شده است که پیش از سته‌ون، در کشورهای خاور، از کسرهای دهدهی استفاده می‌کرده‌اند. جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی، در کتاب «رازگشای شمار» (مفتاح الحساب) خود، در ۱۴۲۷ میلادی، شرح کاملی از عمل با کسرهای دهدهی را می‌دهد.

مقایسهٔ روش ساختن کسرهای دهدهی در چین، یا روشی که کاشانی و ریاضیدانان اروپایی به کار برده‌اند، روشن می‌کند که سندهای چینی برای تاریخ دانش، برتری ویژه‌ای دارد. کاشانی و ریاضیدانان اروپایی، کسرهای دهدهی شبیه عددنویسی شصت‌شصتی ساختند؛ در حالی که در چین، به طور مستقل و بدون استفاده از کسرهای شصت‌شصتی (که هرگز در چین به کار

بی‌بایان و غیر دوره‌ای نشان داد. روشن است که دو مفهوم متعارفی و ددهی، هم‌ارز نیستند. عضوهای دو مجموعه کسرهای متعارفی و کسرهای ددهی را نمی‌توان در تناظر یک به یک قرار داد.

اما در این جا، این مطلب برای ما مهم است که اختلاف بین دو نوع نوشتن عدد را، نه از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها، بلکه بیشتر از نظر گستردگی و استحکام مفهوم خود عدد، تا آن جا که به شکل نوشتن آن مربوط می‌شود، بررسی کنیم. کسر متعارفی در ماهیت خود، وسیله مناسبی است برای نشان دادن عددهای گویا (و تنها عددهای گویا). به یاری کسرهای ددهی هم می‌توان عددهای گویا را بیان کرد؛ ولی بجز آنها، هر عدد دیگری را هم می‌توان با کسر ددهی نشان داد. کسر متعارفی معرف عددهای گویاست؛ در حالی که کسر ددهی معرف همه عددهای حقیقی است و این، به آن دلیل است که در نمایش عددها به یاری کسرهای ددهی، اختلافی بین عددهای گویا با عددهای گنگ وجود ندارد؛ چه در حالت تقسیم و چه در حالت ریشه گرفتن. باید بنابر قانونی که وجود دارد، عمل را به اندازه لازم ادامه داد و رقمهای مربوط به یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره را به دست آورد.

به این ترتیب که، پرسشی که طرح کردیم، می‌توان این طور پاسخ داد: کسرهای ددهی در حوزه عددهای حقیقی عمل می‌کنند و بنابراین، با پیدایش کسرهای ددهی، حوزه عددهای حقیقی مطرح شد و سرچشمه چینی کسرهای ددهی، می‌تواند گواهی بر این مطلب باشد.

بررسی «ریاضیات در نه کتاب» نشان می‌دهد که دانشمندان چینی دوره هان (سده دوم پیش از میلاد تا سده دوم بعد از میلاد)، به طور کامل، با مجموعه عددهای گویا کار می‌کردند. در این رساله، قانونهای عمل با کسرهای متعارفی، تقریباً شبیه آن چه امروز معمول است، آمده است. در همین زمان، مفهوم کوچکترین مضرب مشترک و قاعده امروزی تقسیم کسرها هم وجود دارد که تنها در سده شانزدهم میلادی، در کتابهای درسی اروپا وارد شد. در چین، آن زمان، عددهای منفی هم کشف شده بود.

با در اختیار داشتن عددهای گویا، ریاضیدان چینی، از عهده بیان هر کمیتی که با اندازه‌گیری مستقیم یا از راه محاسبه حاصل می‌شد، برمی‌آمد. آنها پاسخ مسأله را، در حالتی که بی‌معنا به نظر می‌رسید، پیدا می‌کردند، برای نمونه، انجام یک کار، نیاز به ۲۵۸ نفر دارد (مسأله ۲۲ از کتاب پنجم)، یا حرکت دادن

۳۷۲۶
۱۰۰۶۳

نمی‌بردند) پدید آمد. از مدت‌ها پیش از آن هم، دستگاه عدد-شماری ددهی در چین به وجود آمده بود. بنابراین، مسیر پدید آمدن کسرهای ددهی در تاریخ ریاضیات چین، به صورت «خاص» خود بوده است.

کشف دستگاه عددنویسی موضعی شصت شصتی، مربوط به بابلی‌هاست. آنها در آغاز، نمادی برای صفر نداشتند و عددی را که می‌نوشتند، می‌شد به عنوان عددی درست یا عددی کسری خواند. بعدها اخترشناسان دوره الینی، از نوعی عددنویسی استفاده می‌کردند که آمیزه‌ای از عددنویسی ددهی و عددنویسی شصت شصتی بود؛ بخش درست عدد را با دستگاه غیرموضعی ددهی و بخش کسری آن را با دستگاه شصت شصتی. در هند، ایران و اروپای غربی سده‌های میانه، با این کسرها آشنا بودند؛ ولی از آن جا که در همه جهان، دستگاه عددنویسی موضعی ددهی بتدریج عمومی شده بود، ریاضیدانان به این سمت کشیده شدند که به جای کسرهای بابلی، از کسرهای در مبنای ۱۰ استفاده کنند. چینی‌ها، در آغاز، تعداد واحدهای یک مرتبه را با رقمهای هیروگلیفی و سپس خود مرتبه را با همان رقمها می‌نوشتند. این روش، ساده و راحت بود و به دستگاه عددنویسی موضعی امروزی بسیار نزدیک است. کافی است در عددنویسی چینی، نام مرتبه را حذف و نماد صفر را وارد کنیم، تا همان عددنویسی امروزی به دست آید.

«رساله ریاضی سون تسه‌زی» که آن را در این جا بررسی می‌کنیم، به ما امکان می‌دهد مرحله‌های اساسی راه پریچ و خم پیدایش این مفهوم تازه ریاضی را روشن کنیم؛ درست مثل دیرین‌شناسی که با بررسی حیوان فسیل شده، مرحله‌های سنگ شدن آن را مطالعه می‌کند، به تجدید ساختمان مفهوم کسر ددهی در دوره‌های مختلف تکامل آن می‌پردازیم. درک چینی، با توجه به منحصر بودن آن، اهمیت زیادی دارد.

پیش از همه، پرسشی طرح می‌کنیم؛ در حالی که کسرهای متعارفی را می‌شناختند، چه نیازی به کسرهای ددهی بود؟ چه اختلافی بین کسر متعارفی و کسر ددهی وجود دارد؟ آیا این اختلاف مربوط به نوع نوشتن آنهاست یا اختلاف را باید در مضمون این دو مفهوم جست‌وجو کرد؟

کسر متعارفی، عدد گویایی است که می‌تواند به صورت کسر ددهی محدود یا دوره‌ای و نامحدود نوشته شود. ولی هر کسر ددهی را نمی‌توان به صورت کسر متعارفی نوشت. برای نمونه، می‌توان از عدد $\sqrt{2}$ نام برد که با هیچ کسر متعارفی گویایی قابل بیان نیست؛ در حالی که هر عدد گنگی را می‌توان با کسر ددهی

یک وزنه، در یک فاصله، زمانی، به تعداد $\frac{1629}{26.3}$ ۵۷ مرتبه (مسأله ۸ از کتاب ششم).

دربارهٔ عددهایی مثل π یا ریشه‌های گنگ چه می‌کردند؟ در این حالتها، از مقدارهای تقریبی استفاده می‌کردند؛ مساحت دایره یا حجم کره را با فرض $\pi = 3$ به دست می‌آوردند و ریشه گرفتن را تنها دربارهٔ ریشه‌های دوم و سوم عددهای گویا انجام می‌دادند. در دو متنی که تاریخ نوشتن آنها به ما نزدیکتر است و نزدیک به پنج سده بعد نوشته شده‌اند، مطلب به گونهٔ دیگری بیان می‌شود. این دو متن، شامل حاشیه‌های مستقلی است که «لیوهوئه» بر «ریاضیات در نه کتاب» نوشته است و همین بررسی او (و رسالهٔ «سون تسه‌زی») به ما رسیده است.

لیوهوئه، نارضایتی خود را از قاعدهٔ ریشه گرفتن - که محدود به حالت مقدارهای گویاست - و همچنین مقدار تقریبی عدد $\pi = 3$ بیان می‌کند و در یادداشتهای خود، این دستورهای تقریبی را برای ریشهٔ دوم عددهای گنگ

$$a + \frac{1}{2b} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{1}{2b}$$

و مقدار دقیقتر $\pi = 3.14$ را به یاری چند ضلعیهای منتظم محاطی به دست می‌آورد. برای ریشه گرفتن سفارش می‌کند، وقتی ریشه منجر به مقدار درست نمی‌شود، از مرتبه‌های دهمی استفاده کنیم. او نمادهای دهمی را «وی» (یعنی کوچکترین) می‌نامد؛ ولی مثالی نمی‌آورد.

از بحثی که لیوهوئه دربارهٔ محاسبهٔ عدد π کرده است، می‌توان متوجه شد، چگونه کسرهای دهمی را نمایش داده است. در این جا، او پاره‌خطهای راست را به یاری بخش‌بندی دهمی بیان می‌کند؛ واحدهایی که برای طول (چی) به کار می‌برد، چنین هستند: تسون، فن، لی، هاو، میاو، هو؛ و اگر عددی در حد این واحد قابل بیان نباشد، باقیمانده را با کسر متعارفی نشان می‌دهد. مثال:

$$9 \text{ تسون، } 7 \text{ فن، } 7 \text{ لی، } 8 \text{ هاو، } 5 \text{ میاو، } 8 \text{ هو و } \frac{9}{10} \text{ هو}$$

و این، کسری است شبیه دستگاه متری، که در آن، هر بخش نام خاصی دارد. در ضمن، در هر حالت، نوع اندازه‌گیری ذکر می‌شود؛ طول، وزن یا گنجایش. بسته به نوع انتخاب واحد درست، نامهای بعدی پشت سر هم، بخشهای یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره، از این واحد درست را معرفی می‌کنند. به این ترتیب، واحد یکدهم، درحالی ممکن است واحد عدد درست یا واحد یکصدم باشد و نماد ممیز می‌تواند جای خود را تغییر دهد؛ اگر در عبارت

لیوهوئه، واحد اصلی را «چی» بگیریم، کسر برابر $9/9778589$ و اگر «تسون» را واحد اصلی بگیریم، برابر $9/778589$ می‌شود.

از این گونه کسرها، در رسالهٔ سون تسه‌زی فراوان است. ولی در آن جا، کسرهای پیچیده‌ای از نوع آن چه از رسالهٔ «ریاضیات در نه کتاب» آوردیم، دیده نمی‌شود. در رسالهٔ سون تسه‌زی، عددهای ساده‌ای برای مسأله‌ها انتخاب شده است و چنان هستند که منجر به پاسخهای کوچک و ساده می‌شوند. مقدارهای این دستگاه «شبه متری» به یاری دستگاه گسترده‌ای از واحدها بیان می‌شود؛ به نحوی که کسرهای متعارفی، در حالتی که رقمهای دهمی ناشی از تقسیم محدود است، بتواند به آنها تبدیل شود. مثالی می‌آوریم:

مسأله‌ای وجود دارد که در هر دو رسالهٔ «ریاضیات در نه کتاب» و «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» آمده است. مسأله مربوط به داد و ستد غله است:

۷ «دوی» و ۹ «شه نو» ارزن داریم. آنها را با چه مقدار گندم می‌توانیم عوض کنیم؟

حل مسأله ساده است؛ در جدول ویژه‌ای (که در آغاز بخش دوم کتاب «ریاضیات» آمده است) سه رابطه بین گونه‌های مختلف غله، از نظر هم‌ارزی قیمت داده شده است (رابطهٔ مربوط به مسأله ما، با عددهای ۵ و ۲۱ داده شده است). مقدار گندم به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$\frac{7 \text{ «دوی» و } 9 \text{ «شه نو»}}{50} \times 21$$

از محاسبه معلوم می‌شود:

$$1 \text{ «هو»} = 10 \text{ «دوی»}$$

$$1 \text{ «دوی»} = 10 \text{ «شه نو»}$$

واحد اصلی چنینها «دوی» است که تقریباً برابر $10/35$ لیتر است. با توجه به این واحدها، پاسخ مسأله چنین است:

$$3 \text{ «دوی»، } 3 \text{ «شه نو» و } \frac{9}{50} \text{ «شه نو»}$$

در «ریاضیات در نه کتاب» هم، همین پاسخ داده شده است. کسرهای لیوهوئه، با بیانی مشابه، ولی کوتاهتر است. او تنها از سه واحدی که در عمل به کار می‌رود، استفاده کرده است؛ البته بخشهای کوچکتری را هم وارد کرده است. این بخشها در محاسبه‌های اقتصادی، کاربرد نداشتند؛ اما به این دلیل درست شده بودند که بتوان مقدارهای کمتر از واحد را در دستگاه دهمی بیان کرد.

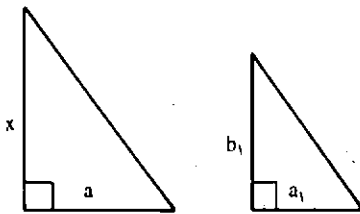
به این ترتیب، به نظر می‌رسد که لیوهوئه، از کسرهایی با منطق

۶ «تسون» و $\frac{1}{5}$ «تسون».

گونه محاسبه‌ای که از مسأله‌های سون تسه‌زی استنباط می‌شود، نشان می‌دهد که می‌توانستند روی این کسرهای ددهی عملهای مربوط را انجام دهند. عملهای پیچیده‌ای مثل ضرب و تقسیم را با روشی انجام می‌دادند که در اساس، همان روش امروزی ماست. اختلاف، تنها مربوط به شکل نوشتن این عددهاست. یک مثال می‌آوریم.

مسأله ۲۵ از کتاب آخر سون تسه‌زی را، که برای هدف ما مناسب است، انتخاب می‌کنیم (سون تسه‌زی، سه کتاب داشته است: کتاب نخست، کتاب میانه و کتاب آخر):

دیرکی با اندازه نامعلوم وجود دارد. سایه آن را اندازه گرفته‌ایم، ۱ «چژان» و ۵ «چی» شده است. جدا از این یک دیرک ستونی وجود دارد که طول آن ۱ «چی» و ۵ «تسون» است. سایه، این ستون ۵ «تسون» شده است. طول دیرک اول چه قدر است؟ پاسخ: ۴ «چژان» و ۵ «چی».



مقدار مجهول، جمله چهارم تناسبی است که سه جمله معلوم آن، ضلعهای مجاور به زاویه قائمه دو مثلث متشابه قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند:

$$x = \frac{a \cdot b_1}{a_1}$$

در این جا، راه حل مسأله که ساده است، برای ما جالب نیست؛ آن چه جالب است، روشهای محاسبه است. اگر واحد درست را «چژان» بگیریم، حل چینی مسأله، با نوع نوشتن امروزی، چنین است:

$$x = \frac{1/5 \times 0/15}{0/05} = \frac{0/225}{0/05} = \frac{22/5}{5} = 4/5$$

در واقع در نوشته چینی گفته شده است:

برقرار می‌کنم سایه دیرک را به ۱ «چژان» و ۵ «چی». این مقدار را در طول ستون، یعنی در ۱ «چی» و ۵ «تسون» ضرب می‌کنم. به مرتبه سمت چپ حرکت می‌دهم، به دست می‌آید: ۲۲ «چژان» و ۵ «چی»، این مقدار را بر سایه ستون، یعنی بر ۵ «تسون» تقسیم می‌کنم و مجهول را به دست می‌آورم.

دستگاه متری استفاده می‌کرد؛ در حالی که در «ریاضیات» هنوز خبری از این کسرها نیست. در «رساله ریاضی سون تسه‌زی»، کاربرد منطقی‌تری از کسرهای ددهی وجود دارد. به نظر می‌رسد، سون تسه‌زی، با برداشتن مسأله‌ای از «ریاضیات در نه کتاب» تلاش می‌کند، بویژه ثابت کند، مقدار مجهول را می‌توان به صورت کسر کامل ددهی نشان داد: ۳ «دوی»، ۳ «شه نو»، ۱ «که» و ۸ «شانو».

و برای این کسر متعارفی را به کار نبرد، از واحدهای کوچکتر از «شه نو» - که خودش یکدهم واحد گنجایش است - استفاده می‌کند.

این مسأله را می‌توان، به عنوان مسأله ویژه‌ای که سون تسه‌زی را به کسرهای ددهی (با نظم دستگاه متری) هدایت می‌کند، بررسی کرد. برای این منظور، او برخلاف لیوهوئه، از روش کلی پیدا کردن جواب پیروی نمی‌کند؛ بلکه از روش کلی تقسیم استفاده می‌کند؛ یعنی مفهوم مرتبه‌های کسرهای ددهی را به همان صورتی که امروز معمول است، مطرح می‌کند.

برای این منظور، به دنبال این مسأله، سه مسأله دیگر را می‌آورد. این سه مسأله هم، از «ریاضیات در نه کتاب» برداشته شده است که در آن جا هم با همین ردیف آمده‌اند. با این مسأله‌ها، حالت‌های مختلف تقسیم عددهای درست مطرح شده است؛ به نحوی که جواب در یک حالت عددی درست، در حالت دوم کسر مرکب ساده نشدنی و در حالت سوم کسر مرکب ساده شدنی به دست می‌آید. در حالت چهارم، تقسیم دارای باقیمانده است و به بهانه آن، کسر ددهی را معرفی می‌کند که، از دید منطقی، منجر به موضوع تازه‌ای در ریاضیات می‌شود.

کسرهای ددهی در مسأله‌های سون تسه‌زی، تنها برای بیان مقدارهای مجهول به کار نمی‌رود (یعنی حالت‌هایی که ضمن محاسبه به دست می‌آید، آن طور که در مسأله مشخص قبل دیدیم)؛ بلکه در داده‌های مسأله‌ها هم وارد می‌شود. به یاری آنها، ضریب تبدیل واحدها هم شرح داده شده است. این ضریب، عبارت است از ۱ «چی»، ۶ «تسون» و ۲ «فن» (این اندازه‌ها در متنهای کهنتر چینی وجود ندارد. این عددها به معنای حجم ۱ «دوی» از مایعی است که ظرف مکعب مستطیل شکل به قاعده ۱ «چی مربع» و ارتفاع $\frac{1}{62}$ «چی» را پر کرده باشد).

در «ریاضیات در نه کتاب»، که در آن جا تنها از سه واحد طول، یعنی ۱ «چژان» = ۱۰ «چی» و ۱ «چی» = ۱۰ «تسون»، استفاده شده، این ضریبها با کسر متعارفی داده شده است: ۱ «چی»،

در این جا بخشهای یکدهم تسون وارد شده است (فن)، ولی قاعده آن را شرح نداده اند (قاعده های چینی، بدون توضیح داده می شد و اغلب یا بعضی بسیار کوتاه).

به این ترتیب می بینیم، ریاضیدانان چینی، با قاعده ضرب ردیفهای دهدهی آشنا بوده اند: «چزان» را در «چی» ضرب می کردند و «چی» به دست می آوردند و غیره:

	چزان	چی	تسون		
عامل اول ضرب	۱	۵			
عامل دوم ضرب		۱	۵		
حاصلضربهای جزئی		۱	۵	۵	
			۲	۵	
حاصلضرب		۲	۲	۵	
خارج قسمت	۴	۵			
بخشی	۲	۲	۵		
بخشیاب		۵			



نتیجه ضرب که برابر ۲ چی، ۲ تسون و ۵ فن است، به سمت چپ برده شده است؛ مثل این که آن را در ۱۰۰ ضرب کرده باشند. روشن است، این عمل برای تقسیمی لازم است که بعد باید انجام شود؛ تقسیم ۲۲ چزان و ۵ چی بر ۵ تسون (در واقع باید گفت بر ۵ چزان؛ زیرا مخراج هم در ۱۰۰ ضرب شده است. در تخته حساب حرکت بخششیاب انجام شده است؛ ولی ضمن بیان قاعده، درباره تبدیل بخششیاب، صحبتی به میان نیامده است). خارج قسمت برابر ۴ چزان و ۵ چی می شود.

پیش از آن که، به روشن کردن قانونهایی بپردازیم که با جمله هایی مثل «برقرار می کنم» و «حرکت می دهم» بیان شده است، با وسیله ای آشنا شویم که در چین باستان، برای محاسبه از آن استفاده می کرده اند. این وسیله، نوعی تخته یا چرتکه محاسبه ای بود که در پیشرفت روشهای محاسبه ای در ریاضیات چینی، نقش اساسی داشته است. از ساختمان این وسیله، آگاهی دقیقی نداریم؛ ولی عددها روی آن، به وسیله چوب خطهای محاسبه ای در دستگاه عددشماری به مبنای ۵ نشان داده می شد. تا عدد ۵ را، به طور ساده، با کنار هم گذاشتن چوب خطها نشان می دادند (برای نمونه، عدد ۴ به صورت |||| نشان داده می شد)؛ ولی برای نشان دادن عددهای از ۶ تا ۹، چوب خطی عمود بر دیگران و در بالای آنها می گذاشتند و مقدار آن را ۵ به حساب می آوردند (برای نمونه، عدد ۸ به صورت |||| نشان داده می شد). روی تخته، چوب خطها را به صورت افقی و قائم و با استفاده از ویژگی موضعی بودن رقمها منظم می کردند؛ جای خالی بین رقمها، به معنای این بود که در آن مرتبه، رقمی وجود ندارد. صفر را روی تخته لازم نداشتند. به این ترتیب، دست کم در چهار سده پیش از میلاد، چینها از همان دستگاه دهدهی موضعی، که ما امروز به کار می بریم، استفاده می کرده اند؛ یعنی روش مشخص کردن عددهای درست و کسری را، تقریباً بدون تفاوت با روش امروزی، انجام می دادند. درباره حل یک مسأله، برنامه ای کلی برای عملهای لازم روی تخته محاسبه طرح می کردند که می توان آن را با برنامه ای که امروز برای حل مسأله ها به رایانه می دهند، مقایسه کرد.

طرح عملهای لازم روی تخته محاسبه را در این جا روشن می کنیم. عمل از ردیفهای بزرگتر به طرف ردیفهای کوچکتر انجام می شد:

$$۱ \text{ چی} = ۱ \text{ چی} \times ۱ \text{ چزان}$$

$$۵ \text{ تسون} = ۱ \text{ چی} \times ۵ \text{ چی}$$

$$۵ \text{ تسون} = ۵ \text{ تسون} \times ۱ \text{ چزان}$$

$$۵ \text{ فن و } ۲ \text{ تسون} = ۲۵ \text{ تسون} = ۵ \text{ تسون} \times ۵ \text{ چی}$$

