

مرحله بالای یگانگی دانش ریاضی ساز و کار تکامل ریاضیات نظری



پرویز شهریاری

اشاره

در شماره ی قبل درباره ی ساز و کار تکامل ریاضیات نظری بحث شد، به طوری که اگر «از بیرون» به تفرق دانشی ریاضی نظری بیندازیم، لایه بندی شدن نظریه دانش ریاضی و طبقه بندی شدن ساختمان آن را می بینیم، ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریه ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه های ریاضی بنگریم. اینک ادامه مطلب را در پی می آوریم.

هندسه ی اقلیدسی را به تناقض بکشاند، ولی سرانجام لباچوفسکی، بایای و گوس متوجه شدند که هیچ گونه تناقضی در هندسه ی هذلولوی وجود ندارد. دوم، وقتی روشن شد هیچ تناقضی در هندسه ی هذلولوی وجود ندارد، آن را در جایی نشانند که می تواند همپای هندسه ی اقلیدسی پیش رود. در این جا موقعیت واقعی بررسی های فلسفی روشن شد: یکی به روشنی از قبول آنچه می دید سرباز می زد و آن را قبول نداشت (لامبرت)، و دیگران با دیدی تازه به جهان نگریستند و در این جهت، موقعیت های جالبی به دست آوردند (لباچوفسکی و بایایی). استدلال های از راه «برهان خلف» و تصور فلسفی را می توان پایه گذار هندسه ی هذلولوی دانست. برای نمونه، در کتاب «مسأله های اساسی فلسفی دانش های طبیعی امروز»، اثر و. ز. برزن کوف و س. آ. له به دف (۱۹۷۵) گفته می شود:

سه فضا را انتخاب کنند. ولی فضای با انحنا ی مثبت، اصل موضوع را حذف می کند، زیرا دو خط راست نمی توانند در بیش از یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. فضای اقلیدسی هم، به طور طبیعی کنار می رود. بنابراین، بررسی کنندگان به هندسه ی هذلولوی روی آوردند.

درباره ی دشواری فلسفی ریاضیات، به مسأله ی ساختمان هندسه ی هذلولوی اشاره شده است و بیش از همه روی این موضوع تکیه شده که این هندسه در درجه ی اول به این خاطر پدید آمده است که استدلال ساده ای برای جانشین کردن چند خط راست موازی به جای یک خط است ارائه دهد. این استدلال ها با هدف اثبات درستی اصل موضوع درباره ی یگانگی خط راست موازی انجام گرفتند؛ اثبات این که عکس آن به جای نادرستی می رسد و یا تناقض پدید می آید و... استدلال ها به این منظور آغاز شدند که

رابطه های منطقی دینامیک، نقشی تعیین کننده در تشکیل هندسه ی هذلولوی داشته اند. چرا نخستین نمونه ی هندسه ی نااقلیدسی، به ویژه از روی هندسه ی هذلولوی ساخته شد؟ در پاسخ به این موضوع، باید از تفاوت هایی که هندسه ی هذلولوی با دیگر هندسه های نااقلیدسی دارد، آغاز کرد.

برای بررسی اصل موضوع توازی، همه ی بررسی کنندگان درباره ی محدود بودن حرکت نمی اندیشیدند، یعنی فرض را بر همگونی فضا می گذاشتند. همگونی فضا هم به معنای ثابت بودن فضا بود. انحنا ی ثابت فضا، دایره ی مکان های فضای ریاضی را به سه سمت محدود می کند: فضای با انحنا ی ثابت مثبت، فضای با انحنا ی صفر (فضای اقلیدسی) و فضای با انحنا ی منفی (فضای لباچوفسکی). بررسی کنندگان در این زمینه تردیدی نداشتند و ناچار بودند، یکی از این

«از جمله عامل‌های مهمی که به کشف هندسه‌ی نوافلیدسی انجامید، کار عظیمی بود که در رابطه با اثبات اصل پنجم اقلیدس انجام گرفت. همه‌ی این تلاش‌ها ناکام ماندند و با هر ناکامی، این اندیشه بیش‌تر قوت می‌یافت که اصل پنجم را نمی‌توان از چهار اصل دیگر و یا قضیه‌ای که به آن مربوط نمی‌شود، نتیجه گرفت. عامل اساسی دیگری که به پیدایش هندسه‌ی نوافلیدسی یاری رساند، پیشرفت فلسفه و اندیشه‌های فلسفی بود که مسأله‌ی طبیعت دانش ریاضی را به‌طور کلی، و هندسه را به‌طور ویژه در مرکز توجه قرار داد. و این، مسأله‌ای قدیمی است که در کارهای رنه دکارت، لایب‌نیتس، ف. به‌کن، کانت هم دیده می‌شود.»

ن. آ. کیسه‌له‌وا، تأثیر متقابل دلیل‌های فلسفی و درونی ریاضیات را، به صورت دیگری روشن می‌کند. او در کتاب «ریاضیات و واقعیت» که در سال ۱۹۶۷ چاپ شد، می‌نویسد: «منطق درونی دانش، دانشمندان و اندیشمندان را به سوی بازبینی اصل موضوع‌های اقلیدس کشاند، و دانشمندان برای اثبات آن‌ها، وقت و انرژی زیادی را روی این اصل موضوع‌ها از دست دادند. ولی سرانجام، نتیجه‌ی این بازبینی‌های منطقی، کشف هندسه‌ی نوافلیدسی بود که تنها امکان داد، در سطح تعریف‌ها، خود ریاضیات را پیش ببرند.»

با بررسی شرط‌های لازم برای ساختن هندسه‌ی هذلولوی معلوم شد، مهم این است که به ناتمام ماندن اثبات اصل موضوع از راه برهان خلف تأکید شود و تأثیر رابطه‌های منطقی دینامیک و رابطه‌های منطقی ریاضی جدیدی که به هدف استدلال کمک می‌کند، مورد توجه قرار گرفت. این تأثیر بعد از بحران نظریه‌ی ریاضی دیفرانسیلی بر دینامیک روشن شد؛ و این علت درونی آغاز هندسه‌ی اقلیدسی از نظر ریاضی بود. کما این که در نیمه‌ی اول سده‌ی هجدهم، لامبرت و

ساکری، نخستین گام‌ها را در اثبات اصل موضوع توازی برداشتند. ساکری کوشید دو خط راست نامحدود را که در نقطه‌ای در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند، در نظر بگیرید. لامبرت هم «در مرزهایی» که «بی‌نهایت به هم نزدیک» و «بی‌نهایت از هم دور» بودند، ایستاد که به او امکان می‌داد، به بستگی‌های تازه‌ی نظری در بررسی اصل موضوع برسد. ولی پس از محاسبه‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها به مفهوم دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری و گسترش اثبات‌ها با برهان خلف، به دشواری برخورد.

رشد ساختمان‌های نظری ریاضیات و دقیق کردن آن‌ها، از راه کنار گذاشتن نمونه‌های موجود و تنها تکیه بر رابطه‌های منطقی، می‌توانست چیزی بیش‌تر از گذشته درباره‌ی اصل موضوع پنجم به دست بدهد. اثبات اصل پنجم، زمینه‌ای بود که براساس آن، رابطه‌های منطقی دینامیک، کمبودهای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی را برطرف می‌کرد. جهت‌گیری بررسی‌های جدید نظری-ریاضی درباره‌ی اصل توازی به این‌جا منجر شد که تنها خود این اصل موضوع مورد توجه قرار گیرد. تصادفی نیست که آفرینندگان هندسه‌ی هذلولوی، تا این اندازه روی بخش‌های آن به‌طور تحلیلی دقت کردند. همه‌ی آن‌ها، کم‌تر یا زیادتر، فضای هندسه‌ی هذلولوی را از نظر دیفرانسیلی، هندسه‌ی تحلیلی و غیره، کاویدند. به ویژه، نیکلای لباچوفسکی به این جنبه‌ها علاقه‌مند بود. و نیامین فیه‌دورویچ کاکان، در یادداشتی که بر کتاب یانوش بایای، به نام «من بایای هستم» نوشته، این‌طور اظهار داشته است: «اگر در کتاب بایای، هندسه‌ی دیفرانسیلی تنها در یک بند شرح داده شده است، برای لباچوفسکی، هندسه‌ی دیفرانسیلی و انتگرال‌گیری که مربوط به آن است، در مرکز توجه بوده است... علت این امر آن است که لباچوفسکی امید داشت در این محاسبه‌ها،

تأییدی بر درستی هندسه‌ی هذلولوی بیابد.»

و آ. پ. نوردن^۱ در کتاب «گوس و لباچوفسکی» می‌نویسد: «لباچوفسکی، خیلی بیش‌تر از گوس در هندسه‌ی نوافلیدسی، جلو رفته بود. او به طور گسترده‌ای مثلثات هذلولوی را بسط داد و در ضمن، خصلت کامل مثلثات کروی را، با طرح اساس هندسه‌ی تحلیلی و دیفرانسیلی فضای خودش، روشن کرد و از آن برای محاسبه‌ی طول، کمان، مساحت، سطح و حجم استفاده کرد.»

بررسی‌های گوس در این زمینه جسته و گریخته و ناکافی بود، ولی لباچوفسکی توانست به نتیجه برسد و به یاری رابطه‌های منطقی دینامیک، عنصرهای سطح را پیدا کند و حتی مقدار سطح را به یاری این عنصرها به دست آورد. ساختار هندسه‌ی هذلولوی به هیچ وجه، بی‌اعتنایی نسبت به رابطه‌های تازه‌ی منطقی نبود. این هندسه به عنوان ساختمان‌ی نظری ریاضی، با جدا کردن بستگی‌های تازه‌ی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی به وجود آمد.

در نظر گرفتن بستگی‌های تابعی و محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، تنها برای یک رشته استدلال‌های هندسی نبود، بلکه به فرض مجموعه‌ای از توازی‌ها هم مربوط است. رابطه‌های نظری تازه، به صورتی جدی درباره‌ی برهان‌های هندسه‌ی هذلولوی هم مورد استفاده قرار گرفتند. پژوهشگر مشهور و به وجود آورنده‌ی هندسه‌ی هذلولوی، آ. پ. نوردن، بارها تأکید می‌کند که هندسه‌ی درونی، با هندسه‌ی هذلولوی لباچوفسکی که می‌خواهد رابطه‌های مثلثاتی را به یاری این هندسه، با استفاده از مقدارهای بسیار کوچک، پیدا کند، و سپس بی‌تناقضی این دستورهارا ثابت کند، منافات ندارد [در کتاب: «کشف لباچوفسکی و مقام آن در هندسه‌ی تازه»].



او گرچه به اشتباه، بی تناقضی رابطه‌های مثلثاتی را با بی تناقضی تمامی هندسه‌ی هذلولوی یکسان دانست، در جست‌وجوی بعدی، بی تناقضی هندسه‌ی نااقلیدسی را ثابت کرد [بلترام، ۱۸۶۸؛ پوانکاره، ۱۸۷۷؛ کلاین، ۱۸۷۱؛ و کولچ، ۱۹۰۰].

ارزش چنین مفهوم‌هایی برای به رسمیت شناختن هندسه‌ی هذلولوی، نه تنها به یک رشته اثبات‌ها و برخی بحث‌های اثباتی کمک کرد، بلکه به ژرف‌تر کردن هندسه‌ی هذلولوی هم یاری رساند. آخرین امکان هندسه‌ی هذلولوی - که بازتاب متدولوژی آن شنیده شد - دورتر از ساختمان نظری آن رفت، زیرا روش قیاسی حداکثر در هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، ماهیت ارزش‌های ریاضی و اصول ساختمانی آن را روشن کرد. افزایش تدریجی نیروی ریاضیات نظری که براساس رابطه‌های نظری تازه بود، روی یکی از این ساختمان‌ها متمرکز شد (روی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی) و به یک رشته تغییرهای روش‌شناسی منجر شد. نخستین و مهم‌ترین تغییر را باید در تغییری دانست که نسبت به اعتبار ریاضیات وارد آمد و اگر دقیق‌تر بگوییم، درباره‌ی هم‌ارزی

استدلال‌های نظری مربوط به رابطه‌های دنیای واقع. پیش از آن، تنها هندسه‌ی اقلیدسی برای بررسی دنیای واقع و استدلال‌های مربوط به آن پذیرفته شده بود. برای نمونه، اگر ثابت شده است که پنج گونه‌ی جسم منتظم وجود دارد، پس در دنیای واقع هم همین پنج گونه یافت می‌شود. یعنی نوعی تغییر نظری از دانش وجود داشت که بر یک ساختمان نظری تکیه می‌کرد و یک روش اصل موضوعی به رسمیت شناخته شده بود. بر همین پایه هم، همه‌ی موضوع‌های ریاضی فهمیده می‌شدند. تولد روش‌های دیگر اصل موضوعی، این یگانه‌بودن تفسیر را به هم زد. این بازتابی از ریاضیات نظری زمان تازه بود که به کلی ریاضیات دنیای کهن را بر پایه‌ی تازه‌ای قرار می‌داد.

کنار رفتن اصل موضوعی اقلیدسی (و وارد شدن اصل موضوع تازه‌ای به جای اصل پنجم اقلیدس) روشن کرد، به جای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، می‌توان هندسه‌ی هذلولوی را قرار داد. تفسیر دنیای واقع، بر پایه‌ی ساختمان جدیدی قرار گرفت که با پیش از آن فرق داشت. استدلال‌های مربوط به دنیای واقع تغییر کرد. بنابراین، روند نظری محاسبه‌ی دیفرانسیلی، همه‌ی این تغییرها را

شامل شد و جهان هستی را با روش دیگری تفسیر کرد، به این ترتیب روشن شد، برای تغییر دنیای واقع، باید مدل‌های ریاضی تازه‌ای درست کرد.

کار واقعی سازوکار تکامل روش نظری و نظم دانش ریاضی با همراه کردن دیفرانسیل و انتگرال، خیلی خوب فعالیت‌ها را سامان داد. به دنبال دوران دیفرانسیل‌ها، دوران انتگرال‌گیری فرارسید. دوران انتگرال‌ها به این جهت فرارسیده که روش دیفرانسیل‌گیری به شدت روش وارون را طلب می‌کرد که یکسان نبودند و با همان روش نمی‌شد به آن پرداخت، استدلال در شاخه‌های گوناگون ریاضیات، مختلف است. ریاضیات نظری به بخش‌های متفاوت تقسیم می‌شود و همه را نمی‌توان در یک جا جمع کرد.

برای انتگرال‌گیری، با تنظیم دانش نظری ریاضی، در دید اول به نظر می‌رسد که بخش‌های مختلف آن با هم تفاوت دارند. وقتی نظریه‌ی اواریسٹ گالوا بعد از مرگ او چاپ شد (۱۸۴۶) که درباره‌ی گروه‌های محدود تبدیل‌ها بود، این امکان را به وجود آورد که با یک دید به موقعیت‌های مختلف نظریه‌های ریاضی نگاه کنیم و همه‌ی آن‌ها را «با دقت هم‌ریختی» مورد بررسی قرار دهیم.

«... و به ویژه در این زمان... دانشمندان عادت می کنند، از یک نظریه به نظریه دیگر که به طور مستقیم از آن نتیجه می شود، با تغییر اصطلاح ها بروند. حیرت انگیزترین نمونه، عبارت است از دوگانگی در هندسه ی تصویری که در آن زمان به صورت دو ستونی که در ردیف هم بودند، در قضیه های دوگانه ای که نقش بزرگی برای مفهوم های هم ریختی داشتند، به عهده گرفت. مفهوم گروه های هم ریخت (به شرطی که بررسی آن ها با دقت نظریش تری انجام گیرد)، به وسیله ی گوس برای گروه های آبلی و به وسیله ی گالوا برای گروه های جابه جابپذیر روشن شد و در میانه های سده ی نوزدهم، دیگر برای همه ی گروه ها به کار می رفت.» [نیکل بورباکی، «رساله ای درباره ی تاریخ ریاضیات»].

انتهای گیری به یاری نظریه ی گروه ها، نه تنها در نظریه های جبری اهمیت داشت، بلکه برای تمامی ریاضیات ثمربخش بود. برای نمونه، در نظریه ی هندسه، زمینه برای اندیشه های نظریه ی گروه، با کار مویوس در کتاب «محاسبه» (۱۸۲۷) آغاز شد که در آن، تلاشی برای یکی کردن هندسه ی تصویری و هندسه ی تحلیلی صورت گرفته بود. گام بعدی در جمع و جور کردن هندسه، مربوط به تغییر عمومیت و اختلاف در عمل های تصویری بود. در واقع، ژرژ بول (۱۸۱۵-۱۸۶۴) و نیز آرتور کلی (Clyley؛ ۱۸۲۱-۱۸۹۵) و جیم جوزف سیلوستر (۱۸۱۴-۱۸۹۷). بستگی هندسه های تصویری و متری را یادآوری کردند. در این جا به ویژه، «یادداشت های ششم درباره ی شکل ها» مهم هستند (۱۹۵۹) که کیلی در آن ها، برای نخستین بار مفهوم مقیاس تصویری را وارد کرد.

این تعریف مقیاس همراه با ملاحظه ی نظری گروه ها، پایه ی «برنامه ی ارلانگن» شد

که چهره ی هندسه را در این دوران که بورباکی آن را «سده ی طلایی» هندسه می نامد، روشن می کند. در این برنامه، از این مطلب صحبت شده بود که «امکان می داد از دیدگاه واحدی، به همه گونه های مختلف دستگاه ها و روش های مختلف هندسی، بنگریم» [فهلکس کلاین، تاریخ «برنامه ی ارلانگن»].

الی ژوزف کارتان، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۶۹-۱۹۵۱) که از سال ۱۹۳۱ عضو فرهنگستان علوم پاریس بود، اندیشه ی کلاین را خیلی جالب توضیح می دهد: «...همه ی گروه های پیوسته، به وسیله ی هندسه ی مستقلی تعریف می شوند. این هندسه، به شرطی که متغیر فرض شود، گروه را همچون مقداری در نظر می گیرد که هر نقطه ی فضا را با این مقدار می سنجد و ویژگی های شکل را بررسی می کند که نسبت به تبدیل های گروه G ثابت است... گروه G را، گروه اصلی این هندسه گویند. بنابراین، یک هندسه ی آفینی به دست می آید که با این هندسه همبستگی (کنفرم) است؛ هندسه ی «لاگرانژ...» [الی کارتان، «نظریه ی گروه هندسه» در کتاب «بنیان های هندسه»].

جست و جوها، تنها به این جنبه ی کار محدود نشدند. گام بلندی در زمینه ی فضای چند بعدی [ریمان، «درباره ی فرضیه ای درباره ی بنیان های هندسه»؛ ۱۸۵۴]، و دستگاه های عددی فوق مختلط و غیره هم برداشته شد. سپس با آغاز از نظریه ی کانتوری مجموعه ها، همه چیز به هم پیوست. برای نمونه، بی شمار بودن مجموعه ی عددهای حقیقی پایه گذاری شد که برای اثبات بسیاری از نظریه های عمیق دانش ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. به این ترتیب عام کردن دانش نظری ریاضیات، به عنصر مهمی برای پیشرفت و تکامل آن تبدیل شد.

ولی با تلاش های فیهلیکس کلاین، برنهارد ریمان و دیگران، گام نهایی برداشته

شد. این، کار عظیمی بود و بدون به کار گرفتن همه ی اندیشه ها، ممکن نبود. به دنبال این تلاش ها وسیله ی نیرومندی (روش قیاس حداکثر) سربرآورد که می توانست یک نتیجه گیری را از بقیه انجام دهد. یک بار دیگر بعد از ریاضیات نظری رسمی، روش حداکثر قیاس، ریاضیات را فتح می کرد؛ با این شرط که عمل برهان خلف را نفی نکنند. عمل تجمع نظر ها یا به یاری روش اصل موضوعی انجام می شود و یا به کمک روش حداکثر قیاس.

از نخستین تلاش های به کار گرفتن روش حداکثر قیاس برای ساختن دستگاه نظری ریاضی دانش تا به وجود آمدن دستگاه راضی کننده، مدت زمانی می گذرد. بنابراین آگاهی پروکولوس، حداکثر قیاس در ریاضیات نظری، به وسیله ی هیپوکرات، له ثون و ادکس یافته است. ولی تلاش آن ها نتوانست به موفقیت برسد، زیرا پارگی های استدلال های اثباتی که لازمه ی آن زمان بود، به معنای ناپایداری فرض اولیه بود. روش رضایت بخش قیاس حداکثر، تنها وقتی به دست آمد که با استدلال های پیچیده ای روبه رو شد و همه ی مانع های اضافی از سر راه برداشته شدند. البته روند پایه گذاری مفهوم ها و قاعده های نخستین نتیجه گیری، چه در ریاضیات نظری رسمی و چه برای ریاضیات نظری دوران جدید را می توان تا بی نهایت ادامه داد، براساس تعریف های نقطه ها، خط های راست و غیره و اصل موضوع هایی که بر پایه ی فرض های دیگری قرار داشت، قرار گرفت. همین مطلب امکان ساختن روش های متفاوتی را برای یک نوع نظریه ی ریاضی آماده کرد. راه منطقی و مطابق جهان واقعی، مفهوم های دلخواه ایجاد نکرد، زیرا: «عمل انسان میلیاردها بار تکرار می شد و در ذهن آدمی شکل های منطقی را به وجود می آورد. این شکل ها، با خصلت اصل موضوعی خود و تنها با نیروی

این میلیاردها تکرار، تحکیم شدند [ولادیمیر ایلچ] به جای معیارهای استدلال، به ریاضیات کاربردی (از آن جمله به وسیله ی بررسی کننده ی آن) رو آوردند و به تدریج پایه های منطقی آن را هم پیدا کردند.

روش حداکثر قیاس در ریاضیات نظری زمان ما در سال های ۸۰ سده ی نوزدهم به وجود آمد. فه لیکس کلاین، در «برنامه ی ارلانگن» بر اهمیت و ارزش بالای بررسی اصول و اصل موضوع های مطرح تأکید می کند و در مقاله ی دوم مربوط به هندسه ی نااقلیدسی (۱۸۷۲)، به ویژه با این عبارت از آن به عنوان «نخستین جمله» به «اصل موضوع زمان» یاد می کند [فه لیکس کلاین، سخنرانی درباره ی، پیشرفت ریاضیات در سده ی ۱۹].

به دنبال او، فوکوس لی در نظریه ی گروه های تغییرپذیر، ساختمان اصل موضوعی را بر پایه ی مفهوم حرکت و دیفرانسیل گیری مطرح کرد [داوید هیلبرت، «اساس هندسه»]. سپس، پشت سر هم انواع گوناگون اصل موضوع ها مطرح شدند. م. پاش، در «سخنرانی هایی مربوط به هندسه ی جدید» (۱۸۸۲)، اصل موضوع های «ردیفی» تکیه می کند که مفهوم های روشنی مثل «بین»، «در درون» و غیره را شامل می شود و ضمن هم نهشتی شکل ها (بر هم قرار دادن شکل ها) پدید می آید. جوزت سه په آنو^۱ (۱۸۵۸-۱۹۳۲) ریاضیدان ایتالیایی، در «سخنرانی هایی درباره ی بنیان های هندسه» (۱۸۸۹)، بر اصل موضوع های «ردیفی» تکیه می کند که به گونه ی دیگری جز نظریه ی «پاش» است. م. پیهری در «هندسه ی مقدماتی به عنوان دانش قیاسی» (۱۸۹۰) بر نقطه ها و حرکت تکیه کرده است.

با این که جست وجوهای مربوط به اصل موضوعی کردن در تمامی دانش ریاضی انجام شده است، در این جا تنها به هندسه ی مقدماتی می پردازیم. کتاب اقلیدس به نام «مقدمات»، به صورت «محکی» برای اصل

موضوعی کردن های جدید است، زیرا در این جا هم، مثل ساختن هندسه ی هذلولوی، آکسیوم ها و پوستولات ها اقلیدسی، مهم تر از نمونه های دیگر پذیرفته شده اند. داوید هیلبرت، «حمله ی» هدفدار و جانانه ای با انتشار کتاب های «بنیان های هندسه» (۱۸۹۹) و «درباره ی بنیان های هندسه» (۱۹۰۳) انجام داد. بر خلاف حالت پایدار هندسه ی مقدماتی، هندسه ی دینامیک مقدماتی ساخته شد (وقتی از ساختمان صحبت می کنیم، ساختار نظری آن را در نظر داریم که بر پایه ی قیاس بنا شده باشد). پس از چاپ کارهای هیلبرت، به قول د. ن. تروتس نیکوف می توان گفت که «مسأله ی بنیان های هندسه به پایان رسیده است». [در کتاب «روند ساختمانی در ریاضیات»].

کتاب «بنیان هندسه» ی هیلبرت، «به خاطر روشنی و عمق طرح خود، به منشوری در دست ریاضیدانان تبدیل شد و همه ی نوشته های پیش از خود را به فراموشی سپرد» [بورباکی در «رساله ای در تاریخ ریاضیات»]. هرمان ویل^۲ (۱۸۵۵-۱۸۸۵) ریاضیدان آلمانی، در کتاب «داوید هیلبرت و کارهای ریاضی او» می نویسد: «یکی از کارهای هیلبرت این بود که ساختمان هندسه را بر بنیان دیگری به جز آنچه تا آن روزگار بود، قرار داد و در نتیجه، ساختاری محکم برای آن به وجود آورد. اگر من اشتباه نکنم، هیلبرت نخستین کسی بود که به این سطح از کار رسید. او به طور منظم، اصل موضوع هایی را که به هم مربوط نبودند، بررسی کرد و بی ارتباطی برخی قضیه های اساسی هندسی را به این یا آن اصل موضوع روشن کرد.»

در زمینه ی هندسه ی مقدماتی این امکان وجود دارد که ماهیت اختلاف بین ریاضیات نظری رسمی را با ریاضیات نظری از نوع دینامیک دقیق تر کنیم. این اختلاف برای هندسه ی مقدماتی هندسه ی مقدماتی

روشن تر است. هیلبرت در کتاب «بنیان های هندسه» ی خود (۱۸۹۹)، مسأله ی پیشرفت هندسه ی مقدماتی را، بدون ارتباط با اصل موضوع پیوستگی مطرح می کند. پ. راشوسکی، در کتاب «داوید هیلبرت و بنیان های هندسه» می گوید: «موفقیت عظیم هیلبرت در تجزیه و تحلیل منطقی هندسه این است که او، امکان پیشرفت هندسه را، بدون استفاده از اصل موضوع پیوستگی، کشف کرد». ساختار هندسه ی ارشمیدسی، به ساختار هندسه ی اقلیدسی نزدیک است.

هیلبرت در کار بعدی خود، «درباره ی بنیان گذاری هندسه» (۱۹۰۲)، همچون ساختار دینامیکی و با استفاده از اصل موضوع هایی که ساخت پیوستگی را هم در نظر گرفته بود. هیلبرت می نویسد: «می خواهم این مطلب را نشان دهم که اختلاف بین اصل موضوع های هندسی که پیشنهاد می کنم (در ۱۹۰۲)، با آنچه پیش از این داده بودم (۱۸۹۹)، چگونه است! قبلاً اصل موضوع ها را طوری تنظیم کرده بودم که اصل موضوع پیوستگی بعد از بقیه ی اصل موضوع ها باشد، تا این پرسش پیش آید که چه تعدادی از قضیه ها و اثبات های هندسه ی مقدماتی به مفهوم پیوستگی ربطی ندارند. برعکس در بررسی تازه، پرسش مربوط به پیوستگی، بین تعریف های صفحه و حرکت و پیش از همه ی اصول موضوع ها جا داده شده است، به نحوی که در این جا مهم ترین پرسش مربوط به کم ترین تعداد آن هاست تا بتوان در ادامه ی کار، از پیوستگی استفاده کرد و به هندسه ی مقدماتی رسید (دایره و خط راست) و به یاری آن ها، هندسه ی مقدماتی را در دنباله ی کار ساخت» [داوید هیلبرت، در کتاب «بنیان های هندسه»].

زیرنویس

1. Nezden
2. Peano
3. Weyl