

از تاریخ بیاموزیم

مرحله بالای یگانگی دانش ریاضی ساز و کار تکامل ریاضیات نظری

۱۹۷۷

پرویز شهریاری

اشاره

در شماره قبل درباره بحران بلوغ ریاضیات نظری و کشف اندازه ناپذیرها (اعداد گنگ) بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می آوریم.

به این انتزاع ها، اضافه هایی شبیه تصورات تاریخی جذب شود و به خودش محدود شود. در حالت اول، تاریخ به صورت رشته ای از مثال ها درمی آید و به بیگانه ای آزادهنده برای ما تبدیل می شود؛ و در حالت دوم، خودمان را اسیر مجموعه ای بی حاصل کرده ایم که مرزهای غیرقابل عبور خصلت های عمده، آن را محدود کرده است.

برای این که از صورت واقعی ریاضیات و دگرگونی های آن دور نشویم، باید در سطح تاریخ به عنوان یک واحد منطقی توقف کنیم. روش شناسی علمی در حوزه تاریخ منطقی کار می کند و پژوهشگری که این حوزه را ترک کند و از حوادث واقعی تاریخی اجتناب ورزد و از آن ها جدا شود، مثل این است که در لبه پرتگاه قدم می زند. ساز و کار دگرگونی شیوه نظری سازماندهی، به این جهت

جریانی به صورتی خاص فرامی رسد؛ به نحوی که به مکان و زمان خاصی مربوط است. جدا کردن حالت های عام و آن چه عمومیت دارد، این خطر را دربر دارد که حالت های خاص را از دست بدهیم و در نتیجه، تنوع اولیه را فراموش کنیم و در آرامش حالت های مشابه و بدون اختلاف فرو رویم. بسیاری از بررسی های کلی نمونه ای و مشخصی وجود دارد که نمی توان آن ها را سرمشق قرار داد.

اگر طرح منطقی ساز و کار تفرق و تجمع دانش نظری ریاضیات را، بدون تطبیق و مقایسه با تاریخ واقعی بدهیم، آن وقت، درک موضوع و روش های ریاضیات نظری که بر این ساز و کار تکیه دارد، «فربه» می شود و مضمون خود را از دست می دهد؛ یعنی مفهوم انتزاعی آن برای مطالعه تکامل واقعی ریاضیات «لاغر» می شود و به این جا می رسد که یا

دگرگونی دانش نظری ریاضیات، نتیجه ای است از فعالیت نظری ذهنی؛ و به همین مناسبت تصادفی می باشد و نتیجه ای است از رابطه بین دانشمندان و مکتب های علمی، علاقه ها و بی علاقه های شخصی، به ذوق و عادت و به طور خلاصه، به انسان بستگی دارد. با وجود این، می توان سمت گیری لازم تکامل ریاضیات نظری، قانون مندی های کلی و ساز و کار تکامل شیوه نظری سازماندهی دانش ریاضی را دنبال کرد. برای این که کردار این ساز و کار را کشف و میزان تأثیر و امکان عمل آن را مشخص کنیم، باید به تاریخ مراجعه کنیم.

ولی تاریخ در برابر گنجینه ای که در اختیار ما می گذارد، انتظار دارد به شرایط آن تن دهیم؛ شرایط مشخص کردن از هم پاشیدگی ها و مرحله های «ساییدگی» ساز و کار تکامل در تاریخ هر روندی و هر

وجود دارد که طناب حوادث واقعی، آن را نگه می‌دارد و در بیرون آن، نمی‌توان درباره این ساز و کار حتی فکر کرد. این را هم یادآوری کنیم که، تاریخ منطقی کم‌تر از تاریخ واقعی و حادثه‌ای، واقعی نیست. درواقع، در این جا حوادث تاریخی را باید دید دیگری نگاه می‌کند: حوادث را با توجه به ارزش روش شناختی آن‌ها و جنبه منطقی آن‌ها می‌نگرد.

اهمیت ساز و کار تکامل روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، در تأثیر متقابل دیالکتیکی روندها و جریان‌های تفرق و تجمع دانش است. ریاضیات نظری از راه اثبات و مناسب بودن درک آن، به نحوی که همه بخش‌های دانش نظری در ارتباط متقابل باشند، تمامیت و یکپارچگی خود را تحقق می‌بخشد. اثبات، وسیله نیرومندی برای تجمع است، که به یاری آن، شباهت ساختارهای نظری، به طور دائم ظاهر می‌شود؛ به یاری اثبات است که نظریه‌های مختلف ریاضی، در درون یک ریاضیات واحد، تعبیری کلی به دست می‌آورند و به عنوان بخشی یا عنصری از یک ساختار عمیق‌تر فهمیده می‌شوند. با وجود این، همین استفاده از اثبات (و نه با نیروی کم‌تری) دلیلی برای تفرق دانش هم هست؛ آن را بغرنج‌تر می‌کند و گزاره‌ها و حکم‌های ریاضی را به شاخه‌های جداگانه تقسیم می‌کند و اثبات، چه به عنوان جمع‌کننده و چه به عنوان متفرق‌کننده، به طور دائم «بازسازی» و از تناقضات «پاک» می‌شود. تضاد روش شناختی، موجب حرکت روندهای تفرق و تجمع دانش ریاضی است و این وضع، تا وقتی این جریان‌ها در تعادل دینامیکی قرار دارند،

تا وقتی «نیروهای محرک» تفرق و تجمع یکدیگر را خنثی می‌کنند، برقرار می‌ماند. جریان‌های تفرق و تجمع، برعکس و به نوبه خود، بر درک ماهیت اثبات اثر می‌گذارند؛ ماهیتی که بسیار «انعطاف‌پذیر» است. از جمله، اگر تفرق نیرو بگیرد، آن وقت اثبات به این معنا گرفته می‌شود که دانش و آگاهی، نوعی متمرکز و دور یک مرکز جمع شود. نظر اثبات بر قیاس قرار می‌گیرد و راه خود را از کلی به جزئی جست و جو می‌کند.



نخستین هدف ریاضیات نظری، با استفاده از بستگی‌های نظری (رابطه‌های منطقی) تأمین می‌شود. اثبات در آغاز از مفهوم‌های اولیه‌ای که مربوط به بستگی‌های نظری در صورت نخستین آن است، شروع می‌شود. با یاری گرفتن از این رابطه‌های «پایه» که از ریاضیات انتخاب شده است، نقطه مربوط به «گل‌زدن» نظری ریاضی انتخاب می‌شود. در جریان «بحران‌ها» و «تجدید سازمان‌های» بستگی‌های نظری این «گل‌زدن»، راه اصلی خود را می‌نمایاند و ساز و کار واقعی تفرق و تجمع مفهوم‌های ریاضی روشن می‌شود و در نتیجه، ساز و کار بستگی‌های نظری را آشکار می‌کند.

آگاهی متفرق و جدا از هم، اغلب در آغاز به صورت به هم پیوسته، ظاهر می‌شوند. این برتری تفرق اولیه در ریاضیات نظری که یگانگی آن را نقض می‌کند، پیش‌تر کلی بودن خود را در ریاضیات نظری نشان می‌داد. برای نمونه، اگر تا پیش از بحران مربوط به محاسبه بی‌نهایت کوچک‌ها، مفهوم‌های

دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری، براساس مشترکی قرار داشت که دلیل وجودی آن‌ها را با هم توجیه می‌کرد، بعد از بحران، به کمک قضیه‌های تازه، این دو بخش به هم پیوستند و کلی بودن نخستین خود را از دست داد. به عنوان مثال، عمل دیفرانسیل‌گیری در R^2 ، هیچ شباهتی با جست و جوی حالت‌ها، ضمن حل مسأله‌های «هم‌پیرامونی» ندارد؛ یعنی رابطه منطقی بین «گسترش» ساختمانی وجود ندارد و به امکان تجدید بنا و استفاده از موضوع‌های تازه بستگی دارد. «خرابی» مفهوم کلی نخستین از نظر ارتباط‌های منطقی، به طور مستقیم از حرکت نظام‌های ریاضی بر یکدیگر به دست می‌آید.

این روند را اندکی مفصل‌تر روی نمونه نظریه‌های هندسی بررسی می‌کنیم، که جدا از هم و به طور مستقل راه خود را پیش گرفتند تا به مرز خود رسیدند. پس از بحران‌های ریاضی، رابطه‌های منطقی هندسه نظری که در بخش دیفرانسیل به وجود آمد (از نظر تاریخی، این روند، در همان محدوده زمانی پیش آمد)؛ «در پایان سده هجدهم، هندسه به دوران شکوفایی خود افتاد... باید یادآوری کرد که در پیشرفت هندسه، تنها تکامل هندسه‌ای که پیش از آن وجود داشت، مورد نظر نبود، بلکه گسترش مستقل هندسه در جهتی که در نظر اول با هندسه پیشین تفاوت داشت، مورد توجه قرار گرفت. به نظر می‌رسید که به جای «هندسه‌ای» دیگر، «هندسه‌ای» مورد توجه بود که با همان روش‌ها و تعریف‌های هندسی پا گرفته است.^۱ اختلاف نظریه‌های هندسی از یکدیگر، مربوط به مکتب‌های ذهنی

دانشمندان بود که تصورهای «خنه داری» از مکتب‌های هندسی داشتند؛ برخی برادران هندسه ترکیبی، هندسه دانانی را که در استدلال‌های خود از هندسه متری استفاده می‌کنند، به رسمیت نمی‌شناسند.^۲ تفرق در هندسه در میانه‌های سده نوزدهم به اوج خود رسید^۳ و فولیکس کلاین در «برنامه ارلانگن» به آن اشاره می‌کند: «... هندسه در ذات خود یگانه است؛ ولی به دلیل پیشرفت



که بدون آن می‌توانستند پیش بروند، به کلی عقب گذاشت و همه آن‌هایی را که به «مقدمات» اقلیدس مشغول بودند، کنار زد. بنابراین با وجود قدیمی بودن و ژرف بودن آن‌ها، و با وجود موفقیت‌های درخشانی که در این زمینه پیدا شده بود، تاکنون همان اصل نخستین نگه داشته شده است.^۵ دشواری اصلی هندسه اقلیدسی، در این بود که به یاری روابط منطقی،

نیاز به هندسه هپیر بولیک (هذلولوی) داشت که جانشینی برای هندسه اقلیدسی باشد.^۶ هندسه مقدماتی تحت تأثیر رابطه‌های نظری، مرزهای بنیان‌های هندسه قبلی را شکست و خود را بازسازی کرد. همه چیز برای اصل توازی اقلیدس متمرکز شد و دیدگاه تازه‌ای به ریاضیات رسمی افزوده شد.

زیرنویس

۱. دوسینگ (ه.ا). «بنیان پیدایش گروه. بررسی تاریخی ریاضی».
۲. فولیکس کلاین. سخنرانی درباره پیشرفت ریاضیات در سده نوزدهم.
۳. ویژگین (و. پ.). درباره برنامه فولیکس کلاین. بررسی تاریخی-ریاضی.
۴. فولیکس کلاین. شرح کوتاهی از بررسی‌های هندسی تازه («برنامه ارلانگن»).
۵. لیاچوفسکی، میکال ایوانوویچ، درباره «مقدمات» هندسه.
۶. ولی ساختن دستگاه اصل موضوع‌هایی که بتواند آکریاتیو اصل موضوع‌های اقلیدسی باشد، یعنی هندسه هپیر بولیک، تنها بعدها و در جریان تحکیم منطقی رابطه‌ها و در جریان اصل موضوع‌های هیلبرت پدید آمد. هندسه هپیر بولیک تنها در زمان کاربرد نظریه توازی به وجود آمد. مفهوم حد هم با به کار گرفتن مفهوم حرکت، با استفاده از استقرای ریاضی پا گرفت.

تا پیش از بحران رابطه‌های منطقی ریاضیات نظری دوران ما، تنها روش قیاسی از کلی به طرف جزئی اقلیدس، به عنوان عاملی منفی، در راه پیشرفت ریاضیات کهن خودنمایی می‌کرد. تا پیش از بحران، می‌فهمیدند که تکیه‌گاه ارشمیدس کاستی‌هایی در زمینه بررسی حرکت و پیوستگی دارد؛ ولی هنوز نمی‌توانستند تغییر مناسب را برای اصل موضوع‌های اقلیدس، به‌طور کامل پیشنهاد کنند. بعد از بحران روابط منطقی و مانعی که در سر راه اصل موضوعی کردن به صورت منفی جلوه می‌کرد، به مانعی مثبت تبدیل شد. انتقادهای کلی مربوط به کافی نبودن روابط نظری پیشین، جای بحث‌های مشخص مربوط به عدم استفاده از امکان‌های هندسه مقدماتی را گرفت.

نیکلاس لیاچوفسکی در سال ۱۸۲۹ نوشت: «در زمان نیوئن و دکارت، تمامی ریاضیات تحلیلی شده بود و چنان گام‌های تندی به جلو برمی‌داشت که دانشمندان را

تند خود در سال‌های اخیر، به شاخه‌های جدا از هم تقسیم شده است، که همچنان به پیشرفت خود، جدا از یکدیگر و به‌طور مستقل ادامه می‌دهند.^۴

اگر «از بیرون» به تفرق دانش ریاضی نظری بیندازیم، لایه بندی شدن نظریه دانش ریاضی و طبقه بندی شدن ساختمان آن را می‌بینیم؛ ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می‌شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریه ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه‌های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه‌های ریاضی بنگریم. این روش را می‌توان روی نمونه دانش ریاضی و به صورتی که با هندسه مقدماتی برخورد داشتیم به کار برد (هندسه به صورتی که در «مقدمات» اقلیدس وجود دارد). به ویژه رشد این نظریه ریاضی با نشان دادن اختلاف ریاضیات نظری جدید زمان ما ریاضیات نظری کلاسیک قابل لمس است.