

بحران بلوغ ریاضیات نظری



پرویز شهریاری

اشاره

در هفدهمین بخش از سلسله مطالب «از تاریخ بیاموزیم»، درباره ریاضیات نظری و چگونه شکل گرفتن سازوکار تکامل آن بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می آوریم.

در نخستین مرحله وجود ریاضیات نظری، نقش عمده به عهده روابط منطقی است که به طور مؤثر در بنای اولیه به کار می رود. تکامل ریاضیات نظری از مرکز مفهومی واحد حرکت می کند و استدلال و اثبات این حق را پیدا می کنند که مراقب باشند تا بستگی های منطقی از روش های مشخصی جدا نشوند؛ علاوه بر این مفهوم های طبیعی و روشن، تنها به این مناسبت لازم اند که به استدلال ها پایه منطقی بدهند.

مفهوم های تازه ای که به وجود می آیند، تأثیر خود را تا آن جا ادامه می دهند که زنجیره نتیجه گیری های متوالی، معنای خود را از دست ندهد و بین تکامل دانش ریاضی، از یک طرف، و تصویرهایی که درباره امکان نتیجه گیری ها وجود دارد، از طرف دیگر، تعارضی به وجود نیاید، یعنی تا جایی که نتیجه های حاصل، به صورتی نامنتظر، دیدگاه های عادی و سنتی را نقض نکنند.

وجود سلسله مراتب در دانش نظری ریاضی، بستگی های نظری را به وجود می آورد که در حالت بحران روابط منطقی قطع می شود. این بحران، با تغییر روابط منطقی به پایان می رسد و با آزادی از ساختمان نظری به طور مستقل پیش می رود و گاهی به عنوان پارادوکسی نسبت به عقل سلیم، تکامل می یابد.

نتیجه گیری های پارادوکسی در ریاضیات نظری، ارزش بی چون و چرایی از نظر آموزشی و روش شناسی دارند و اغلب با تجاوز به حریم بی نهایت ریاضی پدید می آیند که در آن عادت ها تغییر می کند.

در این حالت ها، بیش از همه، آن جایی ظاهر می شود که ریاضیات، که علم درباره بی نهایت هاست (ویل) ممکن است تصورهای نامنتظری درباره بی نهایت بدهد. به همین ترتیب، برای بحران رابطه های منطقی هم، وقتی که منطق از بستگی های منطقی ساده لوحانه استفاده می کند (مثل

وقتی که از صفرا و کبرا استفاده می کند)، به ویژه ضمن بررسی بی نهایت، رودرروی تصورها قرار می گیرد. در ریاضیات نظری کلاسیک، این رویارویی عبارت است از درک مسأله های مربوط به بی نهایت ضمن کشف معمایی، وقتی که ضربه بحران بر ساختمان نظری گسترش یافته فرود آید. معلوم شد تکامل روش های اثبات، به ویژه اثبات با برهان خلف، منجر به برخورد با آموزش های فلسفی فیثاغورسی می شود که بنابر آن، هر چیزی را می توان با زبان عددهای طبیعی و نسبت های آن ها بیان کرد.



آ. سایو درباره اندازه پذیرها و کشف عددهای گنگ، نظر دیگری دارد. در کتاب «آغاز ریاضیات یونانی» که در زبان آلمانی در سال ۱۶۶۹ و به زبان انگلیسی در سال ۱۷۷۹ چاپ شد، دیدگاه او را در این باره شرح می دهد. سایو ضمن بررسی قضیه های اصلی نظریه نسبت ها،

نتیجه می‌گیرد که نظریه نسبت‌های اودوکس، در نظریه موسیقی به دست آمد، نه آن‌طور که گمان می‌رود در نتیجه کشف عددهای گنگ، نظریه نسبت‌ها از همان آغاز خصلت موسیقایی داشت و وسیله‌هایی که به کمک آن‌ها بررسی انجام می‌گرفت، مونوکورد^۱ (سنج) و قانون بود. استفاده از صحت سنج و قانون، شرایطی را به وجود آورد که از تعریف پاره خط‌های راست، به تعریف عددها برسیم: سنج یک سیم داشت و در آن فاصله موسیقی با نسبت دو عدد بیان می‌شد؛ اما برای قانون، پیدا کردن نسبت چهار عدد لازم بود (حالت هندسی). یونانی‌ها، پیش از کشف اندازه‌ناپذیرها هم می‌توانستند از عددها به پاره خط‌ها بروند و در این‌جا، حلقه اتصالی نظریه موسیقایی نسبت‌ها بود.

سپس در جریان حل مسأله‌های مربوط به نظریه موسیقایی نسبت‌ها بود که به کشف اندازه‌ناپذیرها رسیدند: مسأله‌های مربوط به تقسیم مهم‌ترین فاصله‌های موسیقی، به زیر فاصله‌ها، به نحوی که هماهنگی صدا حفظ شود. «این مسأله که ابتدا در نظریه نسبت‌های موسیقی مورد توجه قرار گرفت، موجب شد تا پیدا کردن واسطه هندسی بین طول سیم‌ها (که به صورت عددهای مناسب بیان می‌شد)، آسان‌تر شود، تا بتوانند فاصله‌های مجهول را تولید کنند. در نتیجه این بررسی‌ها، یونانی‌ها متوجه شدند که همیشه برای دو عدد گویا، واسطه هندسی وجود ندارد». کاربرد این درک تازه از نظریه نسبت‌های موسیقی در حساب هندسی، موجب بررسی و مطالعه در دو حوزه شد. از طرفی شرط لازم و کافی برای دو عددی

که واسطه هندسی دارند، به کمک عددها مورد بررسی قرار گرفت و از طرف دیگر، مفهوم تشابه هندسی (برای شکل‌های با زاویه قائمه)، مفهوم دقیق برای نسبت‌های هندسی را تعریف کرد.

با وجود این، چنین بررسی‌هایی می‌توانست مدت‌ها، بدون وجود مبنای نظری وجود نسبت‌ها، ادامه یابد. «... تجزیه متوالی و کسرهای برگشتی [کسرهایی از نوع $f_{n+1} = \frac{1}{1+f_n}$ ، که بسا آغاز $f_1 = 1$ ، تقریب $\sqrt{2}$ را می‌دهد]، چیزی جز تفسیر عملی پیدا کردن اندازه‌ناپذیر نیست، اندازه‌ناپذیر یک درک نظری است، نه ویژگی تجربی نسبت‌های هندسی».

در ریاضیات نظری پایان سده هجدهم، مرکز بحران به مرکز آنالیز ریاضی منتقل شد. نظریه ریاضی که بر اساس مفهوم‌های تابع و رابطه تابعی بنیان گذاشته شده بود تا حد زیادی نمایان‌گر رابطه‌های منطقی پویا (دینامیک) بود. استفاده از بستگی‌های نظری، بدون این‌که مرز و شرطی را برای آن‌ها قائل باشند، گاهی منجر به نتیجه‌ای نادرست و بی‌معنی می‌شد. استفاده از مفهوم‌های مبهم رابطه‌های منطقی، نتیجه‌گیری‌ها را کم‌ارزش کرد و درباره آن‌ها تردیدهایی به وجود آورد. در بین ریاضیدانان حرفه‌ای، جدال درباره بستگی‌های منطقی دینامیک در گرفت. جدال از مرزهای درونی ریاضیات تجاوز کرد و همان‌طور که اغلب چنین است، دامن غیر حرفه‌ای‌ها را هم گرفت. بکلی در رساله «مقدمات دانش انسانی» (۱۷۱۰) و به ویژه در کتاب «آنالیز» خود (۱۷۳۴)، ناستواری و غیرقابل اطمینان بودن ساختمان‌های نظری

ریاضیات را خاطر نشان می‌کند. ف. که جوری (Cajori) می‌نویسد: «استدلال‌های او همچون بمبی بر دژ ریاضیات فرود آمد». عکس‌العمل آموزشی در برابر تکامل دانش ریاضی، نه تنها از مرزهای ریاضیات که از مرزهای آموزشی و روش‌های ریاضی به طور کلی گذشت و از هدف برطرف کردن دشواری‌ها دورتر رفت. ولی فرض بر کلی، برگشت به عقب و به خاک سپردن تمامی دنیای ساختمان‌های ریاضی و صرف نظر کردن از نتیجه‌های ثمربخش بررسی‌های ریاضی بود. راه خروجی برای فرار از موقعیت‌های پیچیده، ناهماهنگی ساختمان‌های ریاضی و بستگی‌های منطقی، جست‌وجو می‌شد. مثل یونان باستان، خروج از بحران به کمک دقیق‌تر کردن نتیجه‌های اثبات‌کردنی، بستگی‌های نظری و سازگار کردن آن‌ها با چهره ساختمان‌های نظری تحقق می‌یافت؛ حتی اگر این دقیق کردن، برخی از بستگی‌های نظری و رابطه‌های منطقی اولیه را تهدید به کنار گذاشتن می‌کرد و این کار، با عمیق‌تر شدن در انتزاع‌ها و سرایت دادن آن‌ها با عمل انجام می‌گرفت.

ریاضیات نظری عصر جدید، به صورت روشنی، تمایل به شکستن تصورات اولیه مربوط به دانش نظری و درباره بازیابی دقیق رابطه‌های منطقی دینامیک، در کنگره ریاضی فرهنگستان علوم برلن (۱۷۸۴-۱۷۸۶) زیر عنوان «درباره نظریه ریاضی بی‌نهایت» ظاهر شد. روحیه آن زمان را می‌توان به خوبی از مسابقه‌ای که فرهنگستان علوم برلن پیشنهاد داده بود، دریافت: «می‌دانیم که هندسه عالی [که در آن



«تعریف به یاری ε و δ » به جای درک پیوستگی‌ها و امکان تجزیه تابع به رشته‌های توانی (تصور تحلیلی) عملی شد. تلاش ریاضیدانان در جهت سازگار کردن بستگی‌های منطقی دینامیک با انبوه دستاوردهای ریاضی و زدودن ابهام از ساختار رشد یافته ریاضیات نظری، در کارها و موفقیت‌های ب. پ. بولترانو (۱۸۱۷)، ا. کوشی (۱۸۲۳)، ن. ای. لباچوسکی (۱۸۳۴)، پ. لورن دیریکله (۱۸۳۷) دیده می‌شود که مفهوم‌های گذر به حد، تابع، دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری را بر اساس خواست‌های ریاضیات نظری تدوین شده، دقیق‌تر کردند. مانع‌هایی که سدره پیشرفت آینده ریاضیات بود، برداشته شد و تکامل دانش واحد ریاضی، در رابطه با مفهوم‌های بستگی‌های نظری آغاز گردید. ریاضیات نظری با پشت سر گذاشتن بحران مربوط به بستگی‌های منطقی، موجودیت خود را باز یافت و به زندگی خود ادامه داد.

به این ترتیب، چه برای ریاضیات سنتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازه کافی آماده دقیق شدن نبودند)، منجر به بحرانی شد که در برخورد با بی‌نهایت به وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود.

نمی‌توانست ریاضیدانان را از بهشتی که به وسیله کارهای دکارت و فرما، نیوتن و لایبنیتس، اویلر، خانواده برنولی، مونژ و دیگران ساخته شده بود، بیرون کند. دوباره دانش ریاضیات نظری تجدید ساختمان کرد، استقلال خود را با صدای بلند اعلام داشت و آغاز به پاک کردن خود از مسیرهای شهودی و رابطه‌های منطقی ناشی از آن کرد. بستگی‌های تکوینی رابطه‌های منطقی و الگوریتم‌هایی که از آن‌ها پیدا شده بود، با وارد شدن خواست تازه برای دقت و استدلال و تعریف مفهوم‌ها، فرو ریخت. سطح دقت در کار بالا رفت و تصوراتهای شهودی جای خود را به استدلال و اثبات داد. برای ریاضیات نظری یونان باستان، درباره این روند، تنها به طور غیرمستقیم می‌توانیم دآوری کنیم؛ با مقایسه آنچه که قبل و بعد از کشف اندازه ناپذیرها وجود داشت. برای ریاضیات نظری عصر جدید، بالا رفتن تقاضای دقت در اثبات‌ها، در رابطه با

زمان، آنالیز ریاضی هم جزو آن بود [به طور پیوسته از بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک استفاده می‌کند. ولی در یونان باستان، با وسواس و دقت از هر چیزی که نزدیک به بی‌نهایت بود، پرهیز می‌کردند و آنالیزهای مشهور امروزی معتقدند که بیان «کمیت بی‌نهایت» در درون خود تضاد دارد. فرهنگستان می‌خواهد روشن کند، چرا از یک متناقض، نتیجه‌های درستی به دست می‌آید [تمایل اولیه به حفظ دستاوردها] و چگونه می‌توان «بی‌نهایت» را با واژه‌ای درست و روشن عوض کرد که از نظام ریاضی پیروی کند و بررسی‌هایی که به کمک آن انجام می‌گیرد، نه چندان دشوار باشد و نه چندان طولانی شود. »

حفظ دستاوردهایی که پژوهشگران با روش‌های تردیدآمیز پیدا کرده بودند، بیشتر از حفظ رابطه‌های منطقی به صورت نخستین خود، ارزش داشت. با اندک تغییری در سخن هیلبرت می‌توان گفت: هیچ کس

زیرنویس
 ۱. διαστημα، فاصله موسیقی در معانی نخستین واژه؛ λόγος به معنای نسبت دو عدد در نظریه فیثاغورس موسیقی.
 ۲. Monocord، آلت موسیقی با یک سیم که برای پیدا کردن نسبت میان صداهای موسیقی به کار می‌رود.