



پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

## ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی

اشاره

در شماره قبل به تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری پرداختیم، همچنین به سازماندهی که ریاضیدان‌های مختلف از ریاضیات داشته‌اند اشاره شد. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم:

اندازه‌گیری بی‌کار (۱۶۸۲) آماده شد. نیوتن از مقداری که پی‌کار برای شعاع زمین به دست آورده بود و از دستاوردهای آن زمان درباره شتاب فشرده‌گی استفاده کرد؛ او برای فشرده‌گی به مقدار  $1:2320$  رسید. این نتیجه‌گیری، در رابطه با ساختمان ریاضیات نظری، یک نتیجه‌گیری کاربردی است. بدون وجود ساختمان نظری، چنین نتیجه‌ای به دست نمی‌آمد. وجود ساختمان منظم و یکپارچه ریاضیات نظری، امکان استفاده از آن را به وجود می‌آورد. ریاضیات نظری این قابلیت را دارد که همه آن نیازهای عملی را، که با امکان‌های دستگاه نظری سازگار است، به حساب می‌آورد.

ریاضیات نظری، که در تدارک این مسأله (که نسبت به ریاضیات نظری عصری بی‌رونی است). به موفقیت می‌رسد، خود موجب تدارک‌های بعدی در همین جهت می‌شود. در تلاش‌های بعدی، یا نتیجه‌گیری نیوتن دقیق‌تر یا به کلی رد می‌شود. با وجود این، همه این تلاش‌ها با استفاده از ساختمان نظری

نظری، به مفهوم کلی خود، با عمل ارتباطی ندارد و به نیازها و خواست‌های بیرون از خود توجهی نمی‌کند. برای این که ماهیت اختلاف‌ها و عنصرهای شباهت را در برخورد این نوع ریاضیات، با عمل روشن کنیم، دو مثال مشخص از این گونه کنش‌های متقابل می‌آوریم.

نخستین مثال به زمان گسترش فعال ریاضیات نظری در دوره جدید مربوط می‌شود. نیوتن با استفاده از «حساب بی‌نهایت کوچک‌ها» و به کار بردن آن در مسأله‌های مربوط به پیدا کردن شکل واقعی زمین، این شکل را به صورت نظری پیش‌بینی کرد. او با این فرض که زمین، زمانی به حالت مذاب و آتشین بوده است، ثابت کرد که شکل واقعی زمین، شبه‌کره‌ای است که در دو قطب خود فشرده شده است. ولی نیوتن در چاپ کشف خود که در ضمن، تأکیدی بر قانون جاذبه عمومی بود، شتاب نکرد و تنها وقتی تصمیم به انتشار آن گرفت که

ریاضیات کاربردی همچون وسیله‌ای برای سازمان دادن دانش ریاضی، اساس کار خود را بر دستاوردهای حاصل از حل مسأله‌های مربوط به اندازه‌گیری و مقایسه‌ای قرار می‌دهد. عنصرها و مبانی تشکیل‌دهنده ریاضیات کاربردی، عبارت‌اند از نیازهای مربوط به فعالیت عملی، و در اطراف این عنصرها، گونه‌های مختلف مسأله‌ها جمع شده‌اند. در برابر سازماندهی کاربردی، مهم‌ترین ویژگی روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، عبارت است از یکپارچگی آن به یاری اثبات عبور منطقی از یک موقعیت به موقعیت دیگر.

از همین جا، اختلاف بین ریاضیات نظری با ریاضیات کاربردی، در ارتباط متقابلی که با فعالیت عملی دارند، نتیجه می‌شود. اگر ریاضیات کاربردی بر فعالیت عملی تکیه دارد و از آن نیرو می‌گیرد، ریاضیات نظری تا اندازه زیادی خودگردان است و با سازوکار درونی و انگیزه درونی خود پیشرفت می‌کند. البته این وضع به معنای آن نیست که ریاضیات

ریاضیات انجام می‌گیرد. در کنار ملاحظه‌های نیوتن، با آغاز از دکارت، نظریه دیگری هم درباره زمین وجود داشت که بنابر آن، زمین مانند سایر جسم‌های بزرگ سماوی، در نتیجه حرکت‌های توفانی ذره‌های مختلف تشکیل شده است. کاسینی‌ها- پدر و پسر - که هوادار نظر دکارت بودند، با استفاده از همان ابزار، یعنی ریاضیات نظری، پاسخ دیگری به دست آوردند: زمین یک بیضوی است که محور کوچک‌تر آن بر صفحه استوا قرار دارد. بررسی‌های شاگردان پی‌کار، که در فرانسه انجام شد، همین دیدگاه دوم را تأیید می‌کرد. به زبان دیگر، ابزار ریاضیات نظری می‌تواند با تکیه بر دیدگاه‌های مختلف، به نتیجه‌های دقیقی برسد. بدون این ابزار نمی‌توان تصویرهای مقدماتی و مبهم را به جلو برد و به نتیجه رسانید. ماهیت کاربرد ریاضیات نظری در به دست آوردن نتیجه‌ای مشخص، به کمک آن است، نه این که در دستور این نتیجه مشخص، ابزار ریاضیات نظری وجود داشته باشد.

این امکان که می‌توان از یک ابزار نظری، به طریقه‌های گوناگون استفاده کرد، موجب پیشرفت بعدی در بررسی‌های عملی و کاربردی می‌شود. این بررسی‌ها تحت تأثیر ریاضیات نظری، با توجه به سطح تکامل آن و با استفاده از موفقیت‌های آن، پیش می‌روند و دگرگون می‌شوند. عدم تطبیق نتیجه‌گیری‌های نیوتن و هواداران دکارت، لزوم مطالعه دقیق‌تر بررسی‌های عملی با جهت‌گیری‌های تازه‌ای را به وجود می‌آورد. «فرهنگستان علوم فرانسه تصمیم گرفت دو هیأت برای اندازه‌گیری کمان زمین، یکی در نزدیکی استوا و

دیگری در نزدیکی قطب بفرستد. مقایسه این کمان‌ها نشان می‌داد، کدام دیدگاه-دیدگاه نیوتن یا دیدگاه خانواده کاسینی و هواداران دکارت- که مورد استفاده ابزار نظری قرار گرفته، درست است. در سال ۱۷۳۵ بوگه، گودن و لاکون دامین به پرو فرستاده شدند، که در آن‌جا، کمان ۳ درجه و ۷ دقیقه را اندازه گرفتند. هیأت دوم در ترکیب مون‌پرتویی، کلر و دیگران، در سال ۱۷۳۶ به لاپلان دیا (در شمال اسکاندیناوی) اعزام شدند که در آن‌جا کمانی به طول یک درجه را اندازه گرفتند. [آ. آ. هوساک در «آغاز نظریه تقریب تابع‌ها»]. هر دو مأموریت، برای اندازه‌گیری ضریب فشردگی «شبه کره» زمین، تنها به یاری تصویرهای نظری و با استفاده از ریاضیات نظری ممکن بود. با توجه به یک مسأله کاربردی، می‌توان در درون ریاضیات نظری، راه تکامل را یافت؛ تکاملی که متکی بر ابزارهای نظری است. از این راه می‌توان مسأله‌های کاربردی را تصحیح کرد و آن را به طرف ساختمان‌های نظری پیش برد. به ویژه از همین راه است که مسأله نخستین، با امکان‌های ریاضیات نظری، در جهت‌های مختلف صیقل می‌خورد، مضمون آن مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و همه آن‌چه را که به نحوی معادل مسأله نخستین است، به طور دقیق، از مضمون آن بیرون می‌کشد.

ریاضیات نظری «نورافکنی» نیرومند است که با پرتوهای خود، مسأله‌های کاربردی را به طور کامل روشن می‌کند. ولی برخلاف نورافکن واقعی، که خصلت ثابتی دارد و تنها یک طرف جسم ساکن را روشن می‌کند، ریاضیات نظری ابزاری

بسیار حساس و دقیق برای مطالعه است و موجب توجه به بسیاری از پیچیدگی‌های مسأله کاربردی می‌شود. از جمله هیأت‌هایی که به پرو و لاپلان دیارفتند، به تجزیه و تحلیل اندازه‌گیری‌های انجام شده و نتیجه‌های حاصل از آن پرداختند. از مشهورترین این کارها، می‌توان از کتاب کلرو با عنوان «نظریه شکل زمین، بر اساس مقدمات هیدروستاتیک» (۱۷۴۳) و مقاله‌های لوپرتویی نام برد که در آن‌ها، درباره پیشرفت ریاضیات نظری و کاربردی با عنوان نتیجه‌هایی از اندازه‌گیری انجام شده، صحبت می‌کند. ریاضیات نظری با کامل کردن خود، و به ویژه از نظر روش‌های مناسب، در برابر خواست‌ها و نیازهای بیرونی، عکس‌العمل نشان می‌دهد. این روش‌ها که وجود آن‌ها بیرون از مسأله‌هایی است که در عمل او بیرون از ریاضیات پیدا شده‌اند، خود را با امکان‌های ریاضیات نظری تطبیق می‌دهند و با گونه‌های روش‌هایی که می‌توانند سودمند باشند، به صحنه اصلی ریاضیات نظری گام می‌نهند. درباره ریاضیات نظری می‌توان گفت، نورافکنی است که خودش، خودش را تکمیل می‌کند؛ ولی این میل تا جایی است که بتواند از پتانسیل خود استفاده کند و تا زمانی که این نیروی درونی تمام نشده است، نمی‌تواند طرح تغییر ساختاری خود را تغییر دهد. بستگی‌های نظری تازه‌ای به وجود می‌آورد و به «گذار منطقی» تازه‌ای، از یک موقعیت به موقعیت دیگر می‌رسد. این نیروی بالقوه درونی، که می‌توان آن را «نیروی تاریخی» ریاضیات نظری دانست، ناشی از پرسش‌هایی است که در عمل، در برابر ریاضیدانان قبلی قرار گرفته است. ریاضیات نظری تنها در محدوده

مسأله‌هایی حرکت می‌کند که با عنصرهای تشکیل‌دهنده ریاضیات کاربردی پیشین شباهت داشته باشد. به همین دلیل است که ریاضیات نظری دوران جدید، که ریشه‌هایی در ریاضیات کاربردی سده‌های میانه دارد و برای حل مسأله‌هایی مناسب است، با انتخاب موضوع‌هایی که جنبه دینامیکی دارد (یا به قول انگلس، ریاضیات با کمیت‌های متغیر)، اغلب برای حل مسأله‌هایی که به صورت‌های مختلف به هم مربوط‌اند و در آن‌ها تعداد بسیار زیادی از پارامترهای ممکن دخالت دارند، مناسب از آب درمی‌آید.

نطفه‌های تکامل نظری، که برای دانش ریاضی مناسب باشند، حتی در میان

نخستین نسل پژوهشگران هم دیده می‌شود. سپس اوایل در مقاله‌های خود و لاپلاس در «مسأله‌ای درباره شکل زمین» (که در ۱۷۶۳ نوشته و در سال ۱۷۸۶ از طرف فرهنگستان علوم پاریس چاپ شد)، عنصرهایی از ریاضیات نظری را تکامل دادند. در این‌جا می‌توان سرچشمه‌های نظریه تقریب تابع‌های پیوسته را پیدا کرد که روی تابع‌های ساده‌ای، که در مجموعه معینی از نقطه‌ها تعریف شده‌اند، مقدار تابع‌های تقریبی را معین کرد. «در الگوریتم‌های لاپلاس برای پیدا کردن بهترین تقریب، می‌توان به نحوی قضیه‌های داله - پوسن، شنیر و دیگر قضیه‌های مشابه آن‌ها را درباره تقریب‌های یکنواخت، باز شناخت» [آ. آ. هوساک در «آغاز پیشرفت نظریه»

تقریب تابع‌ها]. مسأله‌های عملی و کاربردی کمک می‌کنند تا بخش‌های دیگری مورد مطالعه قرار گیرند؛ ولی خود این مطالعه، در چارچوب ریاضیات نظری انجام می‌گیرد و مرزهای مجاز تصحیح و پیشرفت ریاضیات نظری، به وسیله عامل‌هایی که نسبت به آن بیرون است، درست از همین‌جا می‌گذرد. ریاضیات در محدوده این مرزها، همراه با رابطه‌های منطقی (که در اساس استدلال‌ها هستند)، به نظری شدن ادامه می‌دهند.

مثال دوم، به دوره ریاضیات کاربردی سده‌های میانه مربوط می‌شود که در واقع، از زمان ریاضیات نظری و دوره هلنی آغاز می‌شود و تا زمان پیدایش ریاضیات نظری دوره جدید ادامه می‌یابد. این موضوع به حیطه مطالعه «چشم انداز» (پرسپکتیو)، سازمان دادن آن و رابطه متقابل آن با دانش ریاضیات کاربردی مربوط می‌شود. سمت‌گیری کاربردی دانش درباره پرسپکتیو، به ویژه در زمان نوزایی (رونسانس) قابل تأمل است.

یکی از حالت‌های خاص تصویر، عبارت است از تصویر مرکزی شکل فضایی بر صفحه (یا نگاشت تصویری شکل فضایی). درباره پرسپکتیو، نوشته‌های لئون باتیستا آلبرتی (۱۴۰۴ - ۱۴۷۲ میلادی)، پیترو دولا فرانچسکو (۱۴۱۶ - ۱۴۹۲)، لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ - ۱۵۱۲)، آلبریکت دیورر (۱۴۷۱ - ۱۵۲۸) و دیگر پژوهشگران دوران نوزایی، اهمیت زیادی دارد. همه آنان به موضوع پرسپکتیو در درجه اول برای ساختن تصویر چیزهای دنیای واقعی و هم برای کارهای نقاشی و معماری



علاقه مند بودند. نظریه ریاضی پرسپکتیو، در نظریه های کلی بینایی، همراه با روان شناسی دیدن، مطالعه ساختمان چشم، مطالعه درک طبیعت نور و غیر آن حل می شود. از جمله می توان سخن ارسطو را آورد که مرز اپتیک و ریاضیات را مشخص می کند: «اپتیک خطوط ریاضی را مطالعه می کند؛ اما به صورت فیزیکی و نه ریاضی.» در دوره نوزایی، توجه اصلی به ویژگی هایی از پرسپکتیو بود که در عمل به کار می آمدند و در تقسیم بندی تابلوها و نقشه ساختمان ها مورد استفاده قرار می گرفتند. در ضمن، تعریف پرسپکتیو هم با تکیه بر نشانه هایی ساخته شد که برای ساختارهای ریاضی، بیرونی بود. لئوناردو داوینچی که پرسپکتیو را «موضوعی استدلالی» می داند، بلافاصله بر کار عملی آن تأکید می کند: «پرسپکتیو چیزی جز دیدن جایی از طریق شیشه مسطح کاملاً روشن نیست؛ به نحوی که بر سطح آن، باید همه چیزهایی که در پشت این شیشه واقع اند، نقش شده باشد.» در ریاضیات کاربردی، هر نتیجه ای که از اندازه گیری و محاسبه به دست آید، اهمیت دارد. بنابراین برخلاف ریاضیات نظری، دستاوردهای ریاضیات کاربردی، از دیدگاه پژوهشگر، ربطی به ارزش نظری آن ندارد و تنها کاربرد عملی آن ها در نظر گرفته می شود. در واقع، این دستاوردها در ورای نظریه قرار دارد و هیچ اجباری ندارد که در چارچوب نظریه بیان شود. افزایش حجم ریاضیات کاربردی، رشد کمیت دستاوردها و دقیق تر شدن آن ها، در ارتباط مستقیم با خواست های بیرونی است؛ بدون این که لزومی به تصحیح این دستاوردها به کمک نظریه یا

تطبیق آن ها با نظریه وجود داشته باشد و بدون این که ابزار نظری، تأثیر مشخصی بر انتخاب هدف ها و روش های حل مسأله ها بگذارد. ریاضیات نظری، مسأله های عملی را ارزیابی می کند، با دید انتقادی به آن ها می نگرد و تلاش می کند آگاهی های ریاضی را که جهت گیری عملی دارند، به آگاهی های کاربردی تبدیل کند. ولی ریاضیات کاربردی، به عکس، مسأله های عملی را جذب می کند و در خود فرو می برد. در این جابجایی که در زندگی و عمل مطرح می شوند، در گونه های مختلف مسأله هایی که جهت گیری کاربردی دارند، جذب و تحکیم می شوند؛ بدون این که کم ترین توجهی به بستگی نظری آن ها شود. دستاوردها و شیوه به دست آوردن آن ها، در دانش ریاضی و در تقسیم بندی نظری آن اثر می گذارد. لئون باتیستا آلبرتی قضیه های تازه ای را طرح و ثابت می کند و ملاک عمل او، میزان سودمندی کلی آن ها است. بعد اشاره می کند که این قضیه ها به حوزه ای از دانش ریاضی تعلق دارند؛ ولی خیلی زود آن را فراموش می کند. همچنین لئوناردو داوینچی به توضیح برخی جنبه های پرسپکتیو به صورت «دستور العمل هایی» برای رسم تصویرها و منظره ها می پردازد. او شرح می دهد که چگونه تصویرها را قرار دهند، چگونه چیزها را در ارتباط با دوری و نزدیکی آن ها به چشم، به کمک تصویر نمایش دهند، چگونه امکان دیدن منظره از نقطه های مختلف تأمین کنند و.... خود نوع طرح این روش های کار، به نوع «دستور العمل ها» و «نسخه های» ریاضیات کاربردی دوران بابلی ها و مصر باستان برای حل مسأله ها شباهت دارد.

و این، پیامد استفاده از دستاوردهای ریاضیات کاربردی است. همین لئوناردو داوینچی روش درست به تصویر کشیدن مکان ها را این طور شرح می دهد: «شیشه ای به اندازه  $\frac{1}{4}$  صفحه کاغذ سلطنتی انتخاب کن. آن را به خوبی در برابر چشمانت، یعنی بین چشم و چیزی که می خواهی به تصویر بکشی، محکم کن. سپس چشمت را در فاصله  $\frac{2}{3}$  آرش از شیشه قرار بده و سر خود را، به نحوی محکم نگهدار که هیچ حرکتی نداشته باشد. بعد یک چشم خود را با پوششی ببند. قلم مو یا مداد نرم را بردار و آن چه در آن طرف شیشه می بینی، روی آن رسم کن.» در گذشته، چنین «نسخه هایی» درباره نظریه پرسپکتیو در مقایسه با نتیجه های حاصل از آن، در درجه دوم قرار می گرفت و پوشیده می ماند. همین نتیجه گیری ها که به صورتی مبهم جنبه نظری موضوع را منعکس می کنند، به معنای شباهتی است که بین ریاضیات کاربردی قبل از یونان و ریاضیات کاربردی سده های میانه (همراه با دوره رنسانس) وجود دارد؛ گرچه دوره دوم بعد از دوره پیشرفت ریاضیات یونان باستان آمده است.

هم لئوناردو داوینچی و هم لئون باتیستا آلبرتی، از موفقیت گذشتگان درباره نظریه پرسپکتیو اطلاع داشتند؛ زیرا «وی ته لو» در کتاب مشهور خود «اپتیک» آن را شرح داده بود و «جون پیکام» در رساله ای «درباره پرسپکتیو» دستاوردهای نظریه پرسپکتیو را که در گذشته به دست آمده بود، جمع کرده بود. ولی این پوشش، جنبه دشمنی با نظریه را ندارد، بلکه تا حد امکان از نظریه استفاده می کند؛ از نظریه تا آن جا استفاده می کند

که منو مند باشد.<sup>۱</sup> در زمان تسلط ریاضیات کاربردی که تزلزلی در تکامل مستقل ریاضیات نظری قبلی پدید می‌آید، ریاضیات نظری مورد انکار قرار نمی‌گیرد؛ ولی در برابر مسأله‌های کاربردی هم قرار نمی‌گیرد و با آن رقابت نمی‌کند.

وقتی در عمل به پرسپکتیو نیاز باشد، به ناچار به وجود می‌آید، بررسی و مطالعه می‌شود و مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. به یاد آوریم که آلبرتی معمار بود، فرانچسکو نقاشی می‌کرد، دیورر هم نقاش بود و درباره‌ی علاقه و استعداد‌های همه‌جانبه‌ی لئوناردو داوینچی، نیازی به سخن گفتن نیست، و روشن است، وقتی آموزش پرسپکتیو، مربوط به کاربرد مورد استفاده‌ی آن باشد، به هیچ وجه نمی‌توان آن را ریاضیات خالص به شمار آورد. انتقال آگاهی از استاد به دستیار خود، در رابطه‌ی معلمی و شاگردی مشخص می‌شود و این، همان محدودیت تاریخی آموزش است که موجب تحکیم ریاضیات کاربردی سده‌های میانه شده است.

ریاضیات کاربردی پایداری خود را در فعالیت گروه اجتماعی خاصی به دست می‌آورد که در آن، همه‌گونه‌های آموزشی به هم آمیخته است. به وجود آمدن بستگی‌های نظری در ریاضیات و رابطه‌های منطقی بین حکم‌های ریاضی، به حلقه‌ی نظری زنجیره‌ی حرکت و تغییر دانش ریاضی و متناظر با آن، فعالیت علمی را به جنب و جوش جدی‌وامی دارد؛ فعالیت در جهت جست‌وجوی قضیه‌ها و حکم‌های تازه‌ی نظری، به کمک پیچ‌های منطقی و تبدیل عنصرهای ریاضی. جهشی کیفی در فعالیت پدید می‌آید و سرچشمه‌ی نیرومندی برای ظهور

قانونمندی‌های درونی ساختارهای نظری می‌شود و آن‌ها را به جلو صحنه می‌راند. درباره‌ی رابطه‌ی متقابل ریاضیات کاربردی و فعالیت‌های عملی، ریاضیات کاربردی به‌طور کامل و در مجموع، از فعالیت‌های عملی پیروی می‌کند. ریاضیات نظری، این سلسله‌مراتب را به نفع کشف قانونمندی‌های درونی ریاضیات به هم می‌زند. مطالعه‌ی این قانونمندی‌ها، ضرورت تقسیم به دو گروه را پدید می‌آورد؛ گروه اول به سمت عمل می‌رود (ریاضیات کاربردی) و گروه دوم ریاضیات «خالص» را مطالعه می‌کند. خود دانشمند ریاضی («نظریه پرداز») بیش تر فرزند ریاضیات نظری به شمار می‌آید، نه این که ریاضیات نظری فرزند او باشد.

مثال‌هایی که آوردیم، اهمیت اختلاف در روش سازماندهی ریاضیات را در رابطه‌ی متقابلی که با مسأله‌های عملی دارند، روشن می‌کنند:

۱. ریاضیات نظری، ضمن انتخاب مسأله‌ی عملی، با استفاده‌ای که از ساختمان نظری برای حل آن می‌کند، آن را به درون خود راه می‌دهد و جای آن را در فضای ساختار نظری خود مشخص می‌کند. در مقابل ریاضیات کاربردی، از دیدگاه نظری، برای انتخاب مسأله‌ها و امکان حل آن‌ها، توقع چندانی ندارد. با وجود این «بی‌توقعی» نظری ریاضیات کاربردی نسبت به انتخاب مسأله‌ها، به معنای آن نیست که، در ریاضیات کاربردی، هیچ گونه محک و معیاری برای انتخاب مسأله‌ها وجود ندارد.

۲. ریاضیات نظری، در ارزیابی و با احتیاط، با پیشرفت تولید و با نتیجه‌های حاصل از آن برخورد می‌کند. دیدگاه

مسأله را تصحیح می‌کند و همه امکان‌های نظری را، که در درون مسأله وجود دارد، از آن بیرون می‌کشد. در ضمن، تصحیح خود ریاضیات نظری، در بستر بستگی‌های نظری موجود و به وسیله‌ی تکامل ساختاری آن، تحقق می‌یابد. در عوض ریاضیات کاربردی در پیوستگی با بنیادهای عملی پیش می‌رود.

۳. دستاوردهای تازه در ریاضیات نظری، با رابطه‌های منطقی (که اثبات‌ها و استدلال‌ها، براساس آن انجام می‌گیرد) و به یاری کار عملی در جهت کامل کردن ساختار درونی دانش نظری، تحکیم می‌شوند. در ریاضیات کاربردی، دستاوردهای تازه به کمک آموزش (و با توجه به اثر بیرونی آن)، تحکیم می‌یابد.

به این ترتیب، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی، از یک طرف در رابطه با واقعیت، موازی با هم پیش می‌روند و از طرف دیگر، ریاضیات کاربردی رابطه‌ای آگاهانه با واقعیت دارد؛ در حالی که رابطه‌ی ریاضیات نظری با واقعیت ناآگاهانه است. خصلت این «موازی بودن» را می‌توان به‌طور خلاصه، این‌طور بیان کرد: برای ریاضیات نظری، عمل و کاربرد جنبه‌ی بیرونی دارد؛ ولی برای ریاضیات کاربردی، جنبه‌های درونی و بیرونی بر هم منطبق‌اند. با همه این‌ها باید یادآوری کرد که این مقایسه را نمی‌توان خیلی جلو برد و از آن، جای بررسی واقع‌بینانه موضوع‌های ریاضی و بستگی‌های آن‌ها، از نظر تاریخی استفاده کرد.

نویس.....

۱. البته از این جا نباید به این نتیجه رسید که در زمینه پرسپکتیو، خبری از سنت نظری نبوده است. این سنت نظری را می‌توان در کارهای کندی، خازنی و دیگران پیدا کرد.