

از تاریخ بیاموزیم

(۱۰)

دنباله مقاله «ریاضیات ملت‌های هند»
● پرویز شهریاری



جبر

را پس از نماد مجهول می‌گذاشتند. بین جمله‌ها علامتی وجود نداشت. وقتی جمله‌ها را پشت سرهم می‌نوشتند، به معنای جمع بود؛ دربارهٔ تفریق، روی جمله‌ای که باید کم شود، نقطه‌ای قرار می‌دادند، گاهی هم برای نماد تفریق، از علامت صلیب استفاده می‌کردند و آن را بعد از عدد قرار می‌دادند؛ ۵- را به صورت $5 - y$ می‌نوشتند.

نمادی برای برابری، در معادله‌ها وجود نداشت؛ دو طرف معادله را زیر هم می‌نوشتند، به این ترتیب که مجهول‌ها و توان‌ها در یک طرف معادله، زیر همان مجهول‌ها و توان‌ها در طرف دیگر معادله بود. اگر در حالتی، مجهولی وجود نداشت، برای آن، ضریب صفر می‌گذاشتند. معادله

$$197x - 1644y - z = 6302$$

این طور نوشته می‌شد:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & ۱ & ۱۶۴۴ & ۱۹۷ \\ \text{رو} & ۰ & & & & & \\ \text{نی} & & & & & & \\ \text{کا} & & & & & & \\ \text{یا} & ۶۳۰۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}$$

یعنی:

$$197x - 1644y - z + 0 = 0x + 0y + 0z + 6302$$

یا نمونه‌ای دیگر، معادله

دانشمندان هندی در زمینه جبر، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. آنها روی نمادهای جبری کار کردند، قاعده حل معادله درجه را در حالت کلی به دست آوردند و عددهای منفی و عددهای گنگ را وارد عمل کردند. برای مقدار مجهول، جمله ثابت معادله و توان نمادهایی داشتند. در ضمن، بسیاری از این نمادها، کوتاه شده واژه سانسکریتی متناظر با آنها بود.

مقدار مجهول را «یاوات - تاوات» (همان اندازه که) می‌نامیدند و برای نماد مجهول از حرف نخست واژه نخست سانسکریتی آن، یعنی «پا» استفاده می‌کردند. اگر با چند مجهول سروکار داشتند، همان نماد را با رنگ‌های مختلف می‌نوشتند. جمله ثابت را در معادله با «رو»، هجای اول واژه «روپا» (روپیه = کامل) مشخص می‌کردند. برای توان، واژه‌های «وارگا» (مربع)، «گهانا» (مکعب) و «گهاتا» را به کار می‌بردند. برای نمونه توان ششم را «وارنا - گهانا» می‌گفتند و از «گهاتا» برای جمع توان‌ها استفاده می‌شد؛ از جمله توان پنجم را «وارگا - گهانا» می‌نامیدند. نماد توان و ضریب

کردن ضریب‌ها به کار می‌رود، هیچ تفاوتی با روش مهاویرا ندارد.

معادله‌های به صورت:

$$Ax^2 = Bx \text{ و } Ax^2 = Bx^2$$

جزو معادله‌های درجه اول به شمار می‌آید. از جمله، «بهاسکارا» ی دوم، این مسأله را حل می‌کند: «چهار کسر پیدا کنید که مخرج‌های آنها با هم برابر باشند و مجموع مربع‌های آنها برابر با مجموع مکعب‌های آنها شود».

راه حل بهاسکارای دوم را برای این مسأله، به زبان امروزی جبر می‌آوریم. مخرج‌ها را برابر واحد می‌گیریم. کسر اول را x ، کسر دوم را $2x$ ، کسر سوم را $3x$ و سرانجام کسر چهارم را $4x$ می‌نامیم. مجموع مربع‌های کسرها برابر $30x^2$ و مجموع مکعب‌های آنها برابر $100x^3$ می‌شود و از برابری

$$30x^2 = 100x^3$$

معلوم می‌شود، کسر اول برابر $\frac{3}{10}$ ، کسر دوم برابر $\frac{6}{10}$ ، کسر سوم برابر $\frac{9}{10}$ و کسر چهارم برابر $\frac{12}{10}$ است.

به حل معادله‌های کامل درجه دوم، برای نخستین بار، در نوشته‌های آریابهاتا ی اول برخورد می‌کنیم. مسأله پس از یک رشته عمل‌های کم‌وبیش پیچیده، منجر به این معادله می‌شود:

$$ix^2 + px = qp$$

که آریابهاتا، پاسخ آن را این طور می‌دهد:

$$x = \frac{\sqrt{4p^2 + \left(\frac{p}{i}\right)^2} - \frac{p}{i}}{2i}$$

بهاسکارای دوم، از این مطلب آگاه بود که برای جذر یک عدد مثبت، دو جواب به دست می‌آید. او می‌نویسد: «جذر یک عدد مثبت، گاهی مثبت و گاهی منفی است. مجذور عدد مثبت ۳ یا مجذور عدد منفی ۳، برابر است با ۹. بنابراین، جذر عدد مثبت ۹، بسته به نیاز ماست؛ ممکن است عدد مثبت ۳ و ممکن است عدد منفی ۳ باشد. ولی اگر کسی بپرسد جذر عدد منفی ۹ چه قدر است، پاسخ معقولی نداریم؛ زیرا هرگز مجذور یک عدد نمی‌تواند برابر یک عدد منفی بشود».

بهاسکارای دوم، بعضی از معادله‌های خاص درجه سوم و درجه چهارم را بررسی می‌کند و ریشه‌های درست آنها را به یاری تبدیل‌های ساده به دست می‌آورد. برای نمونه، برای

$$8x^3 + 4x^2 - 10y^2 = 4x^2 + 12y^2$$

به این صورت:

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & \text{وا} & \text{کا} & 4 & \text{وا} & \text{یا} & 8 & \text{گها} & \text{یا} \\ 12 & \text{وا} & \text{کا} & 0 & \text{وا} & \text{یا} & 4 & \text{گها} & \text{یا} \end{array}$$

و به این ترتیب، ریاضیدانان هندی گام بلندی در جهت پیدایش جبر علامتی برداشتند؛ گرچه علامت‌هایی که به کار می‌بردند زیاد بود و خود علامت‌ها، یعنی حرف‌های سانسکریت، شکل پیچیده‌ای داشت.

عددهای منفی را برای نخستین بار «براهماگوپتا» (سده هفتم میلادی) به کار برد؛ عددهای مثبت را «دارایی» و عددهای منفی را «قرض» می‌نامید. او می‌گوید: «قانون چنین است: مجموع دو دارایی، یک دارایی و مجموع دو قرض، یک قرض است. حاصلضرب دارایی و قرض، عبارت است از قرض و حاصلضرب دو دارایی یا دو قرض، عبارت است از دارایی».

برای نخستین بار، در نوشته‌های «آریابهاتا» ی اول (سده پنجم و ششم میلادی) به معادله‌های خطی برمی‌خوریم. یکی از مسأله‌های مشهور آریابهاتا، که در ادب ریاضی به مقیاس گسترده‌ای اثر گذاشته، «مسأله قاصدها» است. در این مسأله باید زمان برخورد دو جسم آسمانی را که با سرعت‌های v_1 و v_2 در حرکتند و فاصله بین آنها برابر s است، پیدا کنیم. پاسخ آریابهاتا چنین است:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}$$

در نوشته‌های «مهاویرا» (سده نهم میلادی) به یک رشته مسأله برمی‌خوریم که حل آنها، منجر به دو معادله دو مجهولی درجه اول می‌شود. این مسأله، نمونه‌ای از آنهاست: «قیمت ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی روی هم ۱۰۷ و قیمت ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی روی هم ۱۰۱ شده است. اکنون، خیلی زود قیمت هر لیمو و هر سیب جنگلی را به من بگویید.» این مسأله، منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$9x + 7y = 107$$

$$7x + 9y = 101$$

روشی که امروز برای حل چنین دستگاهی، به یاری برابری

حل معادله

$$x^2 - 2x^2 - 400x = 9999$$

بهاسکارا، به دو طرف معادله، عبارت:

$$4x^2 + 400x + 1$$

را می‌افزاید و به دست می‌آورد:

$$x^2 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$$

پس از دو طرف معادله، جذر می‌گیرد، که در نتیجه به دست می‌آید:

$$x^2 + 1 = 2x + 100$$

$$x^2 - 2x = 100$$

$$x = 11$$

هندی‌ها در حل معادله‌های سیال هم، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. برخی مسأله‌های مربوط به گاه‌شماری اخترشناسی، که در آنها باید دوره‌گردش جایگاه ستاره‌های با دوره‌گردش‌های مختلف پیدا کرد، منجر به معادله سیال می‌شوند. ریاضیدانان هندی، بی‌آن که از کارهای دیوفانت (سده سوم میلادی) آگاه باشند، با جست‌وجوی پاسخ‌های گویا، روش یافتن پاسخ‌های درست و مثبت معادله‌های سیال را به دست آوردند.

حل معادله خطی دو مجهولی:

$$ax + b = cy$$

و راه پیدا کردن پاسخ‌های مثبت و درست آن را، آریابهاتای اول داده است، ولی در نوشته‌های براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، با تفصیل بیشتری آمده است. این روش که به «روش پراکندگی» معروف است، در واقع، با روشی که امروز به نام «کسرهای مسلسل» وجود دارد، تفاوتی ندارد.

موفقیت بزرگی که ریاضیدانان هندی در نظریه عددها به دست آوردند، مربوط به یافتن ریشه‌های درست و مثبت معادله

$$y^2 = ax^2 + b$$

و حالت خاص، ولی مهم آن

$$y^2 = ax^2 + 1$$

است که در آن، a عددی درست است؛ ولی مجذور کامل نیست.

دانشمندان هندی، تنها به یافتن یکی از ریشه‌های مثبت و درست معادله اکتفا می‌کردند؛ ولی این کمبود، ارزش کار آنها

و موفقیتی را که به دست آوردند، کم نمی‌کند.

حل دقیق و کامل این معادله‌ها، بعدها در سال ۱۷۶۹ میلادی، به وسیله لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی داده شد که روش او، به روش عمل هندی‌ها بسیار نزدیک است.

براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، گونه‌های دیگری از معادله‌های سیال هم بررسی کردند؛ برای نمونه معادله

$$ax + by + c = xy$$

در این معادله، $ab + c$ را به صورت ضرب دو عامل m و n درمی‌آوردند و $m + b$ یا $n + b$ را به عنوان x و $n + a$ یا $m + a$ را به عنوان y انتخاب می‌کردند. برای نمونه، در معادله

$$5x + 7y - 29 = xy$$

می‌توان نوشت:

$$ab + c = 5 \times 7 - 29 = 6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$$

و پاسخ چنین هستند:

$$\left| \begin{array}{l} x = 13 \\ y = 6 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 7 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 11 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 8 \end{array} \right|$$

هندسه

آگاهی‌های ریاضیدانان هندی در زمینه هندسه و موفقیت‌هایی که در این راه به دست آوردند، در مقایسه با دانش آنها در زمینه حساب، جبر و نظریه عددها، اهمیت کمتری دارد.

حکم‌های هندسی را در بیشتر حالت‌ها، بدون اثبات می‌آوردند و اغلب همه چیز را، منجر به مراجعه به شکل می‌کردند و بسا یک جمله «دیده می‌شود» اثبات شده می‌پنداشتند. تنها در حالت‌های نادری، اشاره‌های استدلالی وجود داشت. به احتمالی برای آموزش، اثبات را به صورت شفاهی یادآوری می‌کردند.

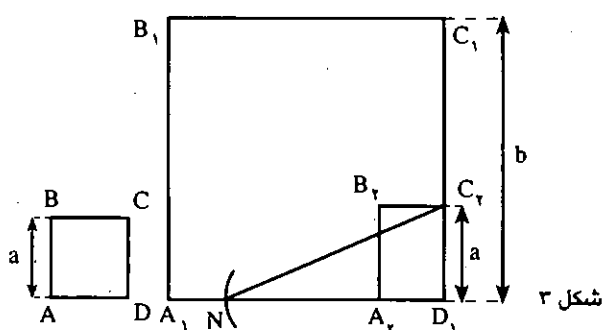
نخستین آگاهی‌های مربوط به هندسه را می‌توانیم در رساله «قانون طناب‌ها» بیابیم، که در واقع، یک رساله دستی برای معماران است که در ساختمان نیایشگاه‌ها و محراب‌ها از آن استفاده می‌کردند. ساختمان نیایشگاه‌ها، از قانون‌هایی پیروی می‌کرد؛ سمت آنها باید به طرف نور باشد و در پایه‌ها، شکل‌های معینی قرار گیرد. برای رسیدن به این هدف‌ها، باید یک رشته مسأله‌های هندسی را حل می‌کردند؛ ساختن زاویه



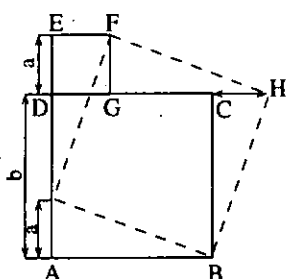
بزرگتر قرار می‌دهیم (شکل ۳). سپس به مرکز نقطه C_P و با شعاع برابر b ، کمائی رسم می‌کنیم تا A_1D_1 را در نقطه N قطع کند. در این صورت:

$$|ND_1| = \sqrt{b^2 - a^2}$$

طولی برابر طول ضلع مربع مجهول دارد.

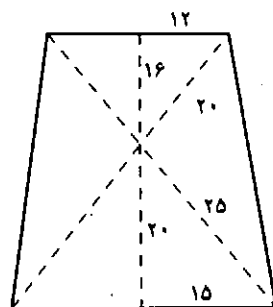


خود قضیه فیثاغورس را هم می‌توان با ساختن مربعی هم‌ارز با مجموع دو مربع دیگر، ثابت کرد. به شکل ۴ توجه کنید؛ مساحت مربع به ضلع a برابر MB برابر است با مجموع مساحت‌های مربع‌های به ضلع‌های AD و DE . در ضمن مثلث‌های MEF ، FHG ، CHB و MBA ، مثلث‌هایی هم‌نهشت هستند.



قائم، مربع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن با عددی درست بیان شده باشند، ساختن مربعی هم‌ارز مستطیل مفروض، ساختن مربعی با مساحت na با در دست داشتن مربع به مساحت a .

بسیاری از این ساختمان‌های هندسی، با توجه به قضیه فیثاغورس انجام می‌گرفت. از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آنها عددی درست باشد، می‌توان دوزنقه متساوی‌الساقینی، شبیه شکل ۱ ساخت:



شکل ۱

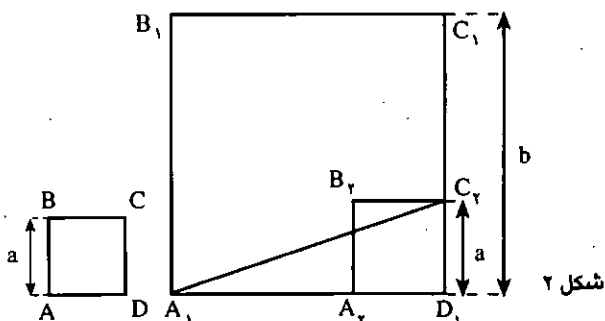
ساختن مربعی با مساحت na ، از روی مربعی با مساحت a ، منجر به دو عمل می‌شد؛ اول، دو برابر کردن یک مربع که برای آن، قطر مربع اول را به عنوان ضلع مربع تازه انتخاب می‌کردند؛ دوم، ساختن مربعی هم‌ارز با دو مربع مفروض. برای این منظور، مربع کوچکتر را در درون مربع بزرگتر قرار می‌دهیم؛ به نحوی که ضلع‌های آن، روی ضلع‌های مربع بزرگتر قرار گیرد (شکل ۲). در این صورت به دست می‌آید:

$$A_1C_P = \sqrt{a^2 + b^2}$$

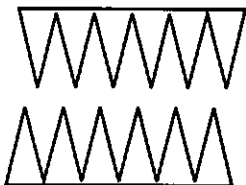
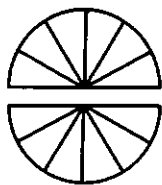
و مربع به ضلع A_1C_P ، مساحتی برابر مجموع مساحت‌های دو مربع دارد؛ زیرا:

$$|A_1C_P|^2 = a^2 + b^2$$

در همین رساله، روش رسم مربعی که مساحت آن برابر تفاضل مساحت‌های دو مربع مفروض باشد، داده شده است. برای این منظور، مثل حالت قبل، مربع کوچکتر را درون مربع

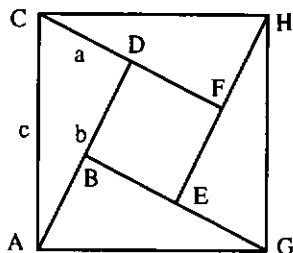


شکل ۲



شکل ۶

آن طور که بهاسکارای دوم داده است، تنها بر پایه شکل ۷ قرار دارد.



شکل ۷

چون همه مثلث‌ها با هم برابرند، پس:

$$S_{ACHG} = 4S_{ADC} + S_{BEFD}$$

که در آن داریم:

$$S_{ACHG} = c^2, S_{ADC} = \frac{1}{4}ab, S_{BEFD} = (b-a)^2$$

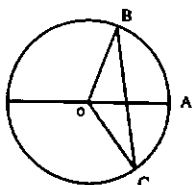
بنابراین:

$$c^2 = \frac{4ab}{4} + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

آریابھاتای اول، برای اندازه‌گیری دایره، عدد π را برابر ۳/۱۴۱۶ می‌گیرد. «نیلاکانثا» (سده‌های پانزده و شانزده میلادی)، مقدار عدد π را تا ۱۰ رقم درست دهدهی محاسبه کرده است.

مثلثات

پیدایش و پیشرفت مثلثات، با مسأله‌های عملی، رابطه تنگاتنگی دارد. در هند، پایه‌های مثلثات گذاشته شد؛ گرچه درباره حل مثلث، موفقیت اندکی پیدا کردند. از تابع‌های مثلثاتی، سینوس، کسینوس و «سینوس - ورسوس» برای آنها معلوم بود. ریاضیدانان هندی، برخلاف یونانیها از نصف وتر، به جای تمام وتر استفاده می‌کردند. اگر طول شعاع OB را واحد بگیریم (شکل ۸)، آن وقت سینوس زاویه AOB برابر نسبت $\frac{|BK|}{|OB|}$ می‌شود، که از نظر عددی برابر طول BK است و طول پاره خط راست OK برابر کسینوس زاویه AOB می‌شود.



شکل ۸

در زمینه هندسه، می‌توان این آگاهی‌ها را در نوشته‌های براهماگوپتا، شریدهارا، مهاویرا و بهاسکارای دوم یافت. براهماگوپتا، دستوری تقریبی برای محاسبه مساحت یک چهارضلعی دلخواه داده است (از این دستور، مصری‌ها هم استفاده می‌کردند):

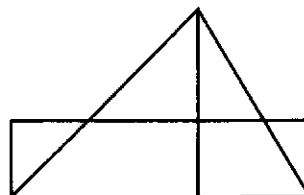
$$S \approx \frac{a+c}{4} \times \frac{b+d}{4}$$

که در آن a و c طول‌های دو ضلع روبه‌رو و b و d طول دو ضلع دیگر روبه‌رو در چهارضلعی هستند. شریدهارا، ضمن این که یادآوری می‌کند این دستور را نمی‌توان برای همه چهارضلعی‌ها به کار برد، دستور محاسبه مساحت ذوزنقه را می‌دهد: حاصلضرب نصف مجموع دو قاعده در ارتفاع. براهماگوپتا، برای محاسبه مساحت چهارضلعی از این دستور هم استفاده می‌کرد:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

که در آن a, b, c, d طول ضلع‌های چهارضلعی و p اندازه نصف محیط آن است. می‌دانیم، این دستور برای محاسبه مساحت یک چهارضلعی محاطی درست است؛ ولی براهماگوپتا، چیزی در این باره نمی‌گوید؛ گرچه دو گونه چهارضلعی را (ذوزنقه متساوی‌الساقین و چهارضلعی‌هایی که قطرهای عمود بر هم دارند) بررسی می‌کند که این دستور برای آنها درست است.

همان طور که پیش از این هم گفتیم، استدلال‌های هندسی در نوشته‌های ریاضیدانان هندی، کوتاه است. برای نمونه، اثبات قضیه مربوط به مساحت مثلث، تنها با شکلی شبیه شکل ۵ داده شده است. در این شکل، ارتفاع مستطیل، برابر نصف ارتفاع مثلث است و شکل با جمله «دیده می‌شود»



شکل ۵

همراه است، اثبات مربوط به محاسبه مساحت دایره، که برابر است با مساحت مستطیلی که ضلع‌های آن به ترتیب، برابر نصف محیط دایره و شعاع دایره است، به وسیله شکل ۶ و همراه با جمله «دیده می‌شود» داده شده است. اثبات قضیه فیثاغورس،

و در ضمن:

$$|K_n^{(1)}| > |K_n^{(2)}| > |K_n^{(3)}|$$

این جمله‌های متمم، برای مقدارهای کوچک n هم، خیلی خوب، تقریب را تصحیح می‌کند. مقداری که نیلاکانتا برای عدد π می‌دهد، دارای ۱۰ رقم است.

کارهای دیگر ریاضیدانان هندی هم، در سده شانزدهم جالب است. آنها دستوری را می‌شناختند که با نمادهای امروزی چنین است:

$$\arctg t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{t^n}{1 + \left(\frac{kt}{n}\right)^2} \quad (I)$$

آنها از بسط سینوس و کسینوس هم، به صورت یک رشته، آگاه بودند:

$$\pi \sin \varphi = S - \frac{S^3}{3! \pi^2} + \frac{S^5}{5! \pi^4} - \dots$$

$$\pi \cos \varphi = S - \frac{S^2}{2! \pi} + \frac{S^4}{4! \pi^2} - \dots$$

که در آن، S طول کمان متناظر با زاویه φ است.

به این ترتیب، ریاضیدانان هندی در سال ۱۵۰۲ میلادی، برای نخستین بار و پیش از «ج. گریگوری» و «لایب نیتس» توانستند $\arctg x$ را به صورت رشته‌ای از توان‌های x بسط دهند و به‌ویژه از رشته‌ای که به نام گریگوری برای $\frac{\pi}{4}$ وجود دارد، اطلاع داشتند. این رشته، بعدها در سال ۱۶۷۱ میلادی، به وسیله گریگوری و در سال ۱۶۷۳ میلادی، به وسیله لایب نیتس، دوباره کشف شد. رشته‌های دیگری را هم که هندی‌ها به دست آورده بودند، در اروپای پیش از نیمه دوم سده هفدهم، شناخته شد. دستور (I) را «اولر» در سال ۱۷۳۹ میلادی پیدا کرد.

درست است که این اندیشه‌ها و بسیاری اندیشه‌های دیگر نتوانست به اندازه کافی رشد کند؛ ولی همین گام‌های نخستین که هندی‌ها در زمینه دستگاه موضعی دهدهی، قانون‌های حساب، مثلثات مقدماتی و یک رشته قاعده برای جبر و نظریه عددها تا پایان سده سیزدهم میلادی برداشتند، در آغاز در کشورهای شرق میانه و نزدیک، و سپس در اروپا، اثر بی‌اندازه‌ای گذاشت و امکان تکامل بعدی ریاضیات را فراهم کرد.

از بستگی بین تابع‌های مثلثاتی، اینها را می‌شناختند:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

مقدار تابع‌های مثلثاتی را، تنها در ربع اول دایره بررسی می‌کردند، برای استفاده از مثلثات در اخترشناسی، جدول‌هایی که تنظیم کرده بودند، نقش اساسی داشت. هندی‌ها جدول و ترها را خیلی دقیق‌تر از یونانی‌ها و بطلمیوس (سده دوم میلادی) تنظیم کردند.

در رساله‌ها و به صورتی مبهم، برخی از قضیه‌های مثلثات کروی هم وجود دارد. برای نمونه، قضیه سینوس‌ها در مثلث قائم‌الزاویه کروی و قضیه کسینوس‌ها در حالت کلی.

در بسیاری از کتاب‌های مربوط به تاریخ ریاضیات، گفته شده است، ریاضیدانان هندی پس از بهاسکارای دوم تا آغاز سده بیستم، هیچ کار جدی و تازه‌ای نکرده‌اند؛ ولی در واقع چنین نیست. موفقیت جالب و مهم ریاضیدانان هندی سده شانزدهم، عبارت است از تبدیل «تانژانت» و «آرک تانژانت» به صورت رشته‌های بی‌پایان.

دانشمندان سده‌های ششم تا دوازدهم، عدد π را در بهترین حالت خود تا ۵ رقم دهدهی می‌شناختند. نیلاکانتا، دانشمند هندی سده شانزدهم، رشته بی‌پایانی را می‌دهد (البته، بدون اثبات) که به زبان نمادهای امروزی چنین است:

$$\pi \varphi = \frac{\pi \sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\pi \sin^3 \varphi}{2 \cos^3 \varphi} + \frac{\pi \sin^5 \varphi}{5 \cos^5 \varphi} - \dots$$

با فرض $\sin \varphi \leq \cos \varphi$ ، اگر در این برابر $\pi = 1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$\varphi = \tan \varphi - \frac{1}{3} \tan^3 \varphi + \frac{1}{5} \tan^5 \varphi - \dots$$

و نیلاکانتا، برای محاسبه π ، فرض می‌کند $\varphi = \frac{\pi}{4}$. در ضمن، $\frac{\pi}{4}$ را به صورت مجموع محدود S_n با جمله متمم $K_n^{(i)}$ نشان می‌دهد، که سه صورت مختلف دارد:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n^{(i)}$$

که در آن داریم:

$$K_n^{(i)} = \frac{(-1)^n}{2n}, K_n^{(ii)} = \frac{(-1)^n \cdot n}{2n-1}, K_n^{(iii)} = \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n(2n^2 + 5)}$$