



احتمال شرطی؛ پیشامدهای مستقل و وابسته

معمولاً دانش آموزانی که مبحث احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن را بررسی می کنند، تا حدود زیادی با مشکل روبه رو می شوند و حتی دیران محترم نیز در انتقال این مفاهیم، تا حدی انرژی بیش تری صرف می کنند؛ در صورتی که به اعتقاد من، احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن، نسبت به مسائل احتمال غیر شرطی، ساده تر و از پیچیدگی کم تری برخوردارند؛ البته به شرط آن که احتمال غیر شرطی را خوب درک کرده باشیم.

درواقع، اشکال اصلی در این است که مقدمات و مفاهیم اولیه احتمال درک نشده است؛ و الا یک مسأله احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسأله احتمال غیر شرطی نیست. بنابراین سعی می کنم ابتدا مفاهیم اولیه و مقدمات احتمال را به صورتی ساده و تا حدی شهودی بیان کنم و سپس به بحث اصلی، یعنی احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل و وابسته می پردازم.

به وقوع پیوستن یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای حاصل، عددی است حقیقی مانند $0 \leq p \leq 1$ ، که در واقع عدد p شانس به وقوع پیوستن پیشامد مزبور را اندازه گیری می کند؛

اولین توضیح، درباره واژه احتمال است که بعضی آن را مترادف با شانس در نظر می گیرند، که این اشکال دارد. شما می دانید که وقتی یک پدیده تصادفی رخ می دهد، احتمال

بنابر این احتمال مترادف است با اندازه گیری شانس.

توضیح دیگر در مورد سه واژه پدیده تصادفی، فضای نمونه ای و پیشامد تصادفی است که در توضیحات قبل به کار رفته است.

هر پدیده ای که در رخداد آن قطعیت وجود نداشته باشد، به طوری که از همه حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آن اطلاع داشته باشیم، اما چگونگی به وقوع پیوستن آن مشخص نباشد، یک پدیده تصادفی نامیده می شود.

به عنوان مثال، این پدیده که سنگی را از ارتفاعی رها کنیم و به زمین برخورد کند، یک پدیده قطعی است و تصادفی محسوب نمی شود؛ ولی پدیده انداختن یک تاس، یک پدیده تصادفی است؛ زیرا اولاً از همه حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آن پدیده اطلاع داریم (عدد ۱ یا ۲ یا ... و یا ۶ ظاهر خواهد شد) و ثانیاً، تا وقتی تاس در حرکت است، هیچ قطعی در روشن شدن هریک از ۶ عدد (۱ تا ۶) وجود ندارد.

حالا اگر پدیده ای تصادفی رخ دهد و ما همه حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آن پدیده را در یک مجموعه مانند S قرار دهیم، به مجموعه S فضای نمونه ای آن پدیده تصادفی گفته می شود. به عنوان مثال، وقتی تاسی را می ریزیم، فضای نمونه ای آن (مجموعه ای شامل همه حالت های ممکن) عبارت است از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ یا وقتی سکه ای را می اندازیم، $S = \{H, T\}$ فضای نمونه ای آن است. به عنوان مثال، اگر ارقام ۲، ۳، ۴ را به تصادف کنار هم قرار دهیم، $S = \{432; 423; 324; 342; 243; 234\}$ فضای نمونه ای این پدیده تصادفی را تشکیل می دهد.

در صورتی که یک پدیده تصادفی رخ داده و S فضای نمونه ای این پدیده تصادفی باشد، هر زیرمجموعه S مانند A را یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S می نامیم. در واقع هر پیشامد تصادفی از یک فضای نمونه ای، زیرمجموعه ای از آن فضای نمونه ای بوده که می تواند تهی ($\emptyset$) یا خود مجموعه S باشد، که پیشامد تهی را پیشامد نشدنی یا غیر ممکن و S را پیشامد حتمی می نامند.

به نظر شما وقتی یک تاس را می ریزیم، چند پیشامد تصادفی می توان برای این پدیده تصادفی تعریف کرد؟ با عجله جواب ندهید! به تعریف پیشامد تصادفی که ذکر شد، دقت کنید. بلی، صحیح است؛ ۲۶ پیشامد تصادفی در ریختن یک تاس می توان تعریف کرد (هر زیرمجموعه یک مجموعه ۶ عضوی که تعدادشان ۲۶ است). اگر فرض کنیم $A_1 = \emptyset$ و $A_2 = S$ و $A_3 = \{2, 3, 4\}$ ، $A_4 = \{1, 4, 6\}$ ، $A_5 = \{2, 3, 6\}$ و $A_6 = \{1, 4\}$ برای هریک از مجموعه های A_1 تا A_6 ، می توان پیشامدهایی به صورت زیر تعریف کرد:

A_1 : پیشامد این که تاس عددی بزرگتر از ۶ بیاید.

A_2 : پیشامد این که تاس عددی کوچکتر از ۷ بیاید.

A_3 : پیشامد این که تاس عددی بین ۱ و ۵ بیاید.

A_4 : پیشامد این که عدد رو شده، در معادله $(x-6)(x-4)(x-1) = 0$ صدق کند.

تمرین: برای هریک از مجموعه های A_5 و A_6 یک پیشامد تعریف کنید.

موضوع دیگری که بسیار مهم بوده و به بحث آینده ما هم مربوط است، موضوع رخداد یک پیشامد تصادفی است و حالت هایی که می تواند یک پیشامد تصادفی رخ دهد، این بحث را با یک پرسش و طرح یک مسأله کامل می کنیم: مجموعه های $A_1 = \{2\}$ ، $A_2 = \{2, 4, 6\}$ ، $A_3 = \{2, 3, 5\}$ ، $A_4 = \{1, 2, 3\}$ و $A_5 = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر می گیریم. حال اگر یک تاس را بریزیم، واضح است که $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای نمونه ای این پدیده بوده و A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 همگی پیشامدهایی در این فضای نمونه ای هستند. سؤال این است که اگر مشاهده کنیم که تاس عدد ۲ را نشان می دهد، کدام یک از پیشامدهای تصادفی A_1 تا A_5 قطعاً رخ داده اند؟ پیشامد A_1 قطعاً رخ داده است، پیشامد A_2 چگونه؟ اگر فرض کنیم پیشامد A_2 ، «رو شدن عدد زوج» تعریف شود و تاس ۲ بیاید، آیا زوج نامیده؟ پس A_2 نیز رخ



دیگر $p(A \cap B)$ ، یعنی «احتمال رخداد دو پیشامد A و B با هم».

نتیجه مهم: اگر A و B هر دو از یک فضای نمونه ای مانند S تعریف شده باشند، $(A \cap B)$ یعنی رخداد توأم A و B با اشتراک مجموعه ای برای دو مجموعه A و B برابر است. پس اگر در یک مسأله احتمال، به $p(A \cap B)$ برخوردیم، برای آن فقط یک تعبیر داریم و آن «احتمال این که دو پیشامد A با هم رخ بدهند» بنابراین اگر A و B هر دو از یک فضای نمونه ای مانند S تعریف شده باشند، کار ساده است و به دنبال اعضای مشترک A و B هستیم.

حال به بحث اصلی خودمان، یعنی احتمال شرطی باز می گردیم، پس از این، فرض می کنیم شما مقدمات احتمال را آموخته اید و سعی می کنیم از رابطه اصلی احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه ای S، یعنی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم.

اگر به یاد داشته باشید، در ابتدای بحثمان اشاره کردم که «یک مسأله احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسأله احتمال غیر شرطی نیست». سعی می کنم این موضوع را با ذکر چند مثال برای شما ملموس کنم و سپس مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن را بیان و تجزیه و تحلیل کرده، به طرح و حل مسائلی می پردازیم تا سرانجام پیشامدهای مستقل و وابسته را تعریف کنیم.

مثال ۱. تاسی را می ریزیم، اگر احتمال روشن شدن عدد اول

را بخواهیم، جواب می دهید $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. حال اگر سؤال کنیم چقدر احتمال دارد عدد اول رو شود، به شرط آن که بدانیم تاس عدد زوج آمده، جواب شما چیست؟

وقتی می گوئیم به شرط آن که تاس عدد زوج آمده، یعنی پیشامد زوج آمدن رخ داده است؛ لذا فضای نمونه ای جدیدی که همواره زیر مجموعه فضای نمونه ای اصلی است، به وجود

داده است. اگر پیشامدهای A_1 و A_2 به ترتیب «رو شدن عدد اول کوچک تر از ۷» و «رو شدن عدد طبیعی و کوچک تر از ۴» تعریف شوند، آیا A_1 و A_2 نیز رخ داده اند؟ جواب مثبت است و تنها پیشامد A_3 است که رخ نداده، لذا می توان گفت: هر پیشامد (زیر مجموعه) از فضای نمونه ای S (ریختن یک تاس) که شامل عدد ۲ باشد، رخ داده است (اگر تاس ۲ آمده باشد)، تعداد این پیشامدها برابر است با $32 = 25$. چرا؟

تمرین. دو تاس را با هم می ریزیم و مشاهده می کنیم که مجموع دو تاس بزرگ تر از ۱۰ است؛ در این صورت چند پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای حاصل می تواند رخ دهد؟ جواب: (۲۳)

یکی دیگر از موضوع هایی که در آینده با آن روبه رو خواهیم شد، مسأله رخداد دو پیشامد A و B به صورت توأم است. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و بخواهیم با هم رخ بدهند، دو حالت ممکن است پیش آید؛ یکی آن که این دو پیشامد که با هم رخ می دهند، از نظر عضو نیز اشتراک داشته باشند و دیگر این که عضو مشترک نداشته باشند؛ یعنی اشتراک مجموعه ای برای آن ها تهی باشد. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۱. تاسی را می ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد اول» تعریف می کنیم، که در این مثال $(A \cap B) = \{\emptyset\}$ ؛ بنابراین اگر تاس ۲ بیاید، دو پیشامد A و B با هم رخ داده اند.

مثال ۲. تاسی را می ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» تعریف می کنیم که در این مثال $(A \cap B) = \emptyset$ ؛ بنابراین A و B نمی توانند با هم رخ بدهند.

تذکر مهم: در احتمال همواره رخداد دو پیشامد A و B را به صورت توأم و با نماد $(A \cap B)$ نمایش می دهیم؛ به عبارت



درواقع $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{9}$ همان احتمال مطلوب است!

(بعداً نیز ثابت می شود که $p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ به عنوان فرمولی برای محاسبه احتمال رخداد A به شرط آن که B رخ داده باشد، به کار می رود.)

$$\text{ب) } B = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), \dots, (2,4), (4,2)\}$$

$$A \cap B = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \Rightarrow p(A/B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } B = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow p(A/B) = \frac{0}{6} = 0$$

(درواقع اگر مجموع دو تاس ۷ باشد که عددی فرد است، باید یکی از آن دو عدد زوج و دیگری فرد باشد و امکان هر دو زوج بودن وجود ندارد.)

$$B = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

د)

$$A = \{(6,4), (4,6), (5,5), (6,5), (5,6), (6,6)\}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{6}{9}$$

$$\text{هـ) } B = \{(6,4), (4,6), (5,5), (6,5), (5,6), (6,6)\}$$

$$A = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(B)}{n(B)} = 1$$

(توجه دارید که $(A \cap B)$ به همان معناست که قبلاً روی آن بحث شد؛ یعنی A و B با هم رخ بدهند و چون A و B از یک فضای نمونه ای هستند، عضوهای مشترک A و B مورد نظر است.)

در شماره بعد، به بیان و تجزیه و تحلیل مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن خواهیم پرداخت. توصیه می کنم

آمده است، که در این مثال، شرط موجود باعث شده فضای نمونه ای جدید باشد که مادر این فضای نمونه ای، به دنبال پیشامد مطلوب خودمان، یعنی اول آمدن تاس هستیم که چون فقط عدد ۲ در S_1 اول است، احتمال روشن شدن عدد اول به شرط زوج آمدن، عبارت است از:

$$p(A) = \frac{1}{3}$$

مثال ۲. دو تاس را با هم می ریزیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف. مجموع دو تاس ۸ باشد؛ به شرط آن که بدانیم هر دو تاس اول هستند.

ب. مجموع دو تاس کم تر از ۷ باشد؛ به شرط آن که هر دو تاس مثل هم باشند.

ج. هر دو زوج باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است.

د. مجموعشان بزرگ تر از ۹ باشد؛ به شرط آن که بدانیم هر دو بزرگ تر از ۳ هستند.

هـ. هر دو بزرگ تر از ۳ باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان بزرگ تر از ۹ است.

حل: در حل تمام قسمت ها، همواره B را پیشامدی که رخ داده و A را پیشامد مطلوب است، فرض می کنیم:

(الف)

$$B = \{(2,2), (2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (5,5), (3,3)\}$$

$$A = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$$

$$P(B \text{ به شرط } A) = p(A/B) = \frac{2}{9}$$

(پیشامد B درواقع فضای نمونه ای جدید است که در آن به

دنبال مجموع ۸ هستیم و فقط دو زوج (۵,۳) و (۳,۵) در B

یافت می شوند که مجموعشان ۸ است. حال اگر کمی دقت

کنید، ملاحظه می کنید که $A \cap B = \{(3,5), (5,3)\}$ و

برای آمادگی بیش‌تر، تمرین‌های زیر را حل کنید.

ب. دو سکه T بیاید؛ به شرط آن که بدانیم حداکثر دو سکه H است.

تمرین:

۱. سه تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف. هر سه اول باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان کم‌تر از ۹ است.

ب. هر سه فرد باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است.

۲. سه سکه را با هم می‌اندازیم، چه قدر احتمال دارد:

الف. هر سه H بیایند؛ به شرط آن که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

۳. در جعبه‌ای، ۴ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این جعبه، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، چه قدر احتمال دارد:

الف. هر سه مهره آبی باشند؛ به شرط آن که بدانیم هر سه هم‌رنگ هستند.

ب. ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد؛ به شرط آن که بدانیم هیچ کدام قرمز نیستند.

(جواب این تمرین‌ها را در شماره بعدی مجله ملاحظه خواهید کرد.)

معماهای فکری و منطقی



B، C، J و S که نام‌های اشخاصی هستند که مسؤولیت‌های حسابداری، صندوقداری، ریاست و مدیرعامل را - گرچه نه لزوماً به این ترتیب - در بانکی به عهده دارند.

مدیرعامل، گرچه صندوقدار مرتب او را شکست می‌دهد، با هیچ کس دیگر در بانک شطرنج بازی نمی‌کند.

هم رئیس و هم صندوقدار شطرنج‌بازان بهتری نسبت به حسابدارند.

J و S همسایه دیوار به دیوارند و اغلب عصرها با هم شطرنج بازی می‌کنند. C شطرنج‌باز بهتری نسبت به J است.

حسابدار نزدیک مدیرعامل زندگی می‌کند؛ اما از دیگران دور است.

مقام هر یک کدام است؟

مسئولیت
مدیرعامل

صندوقدار

رئیس

حسابدار