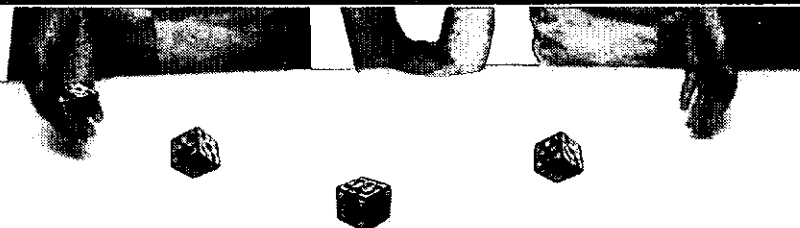




ممد رضا امیری

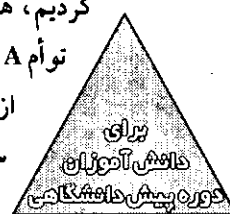


احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته



تعداد حالات ها	اعداد تاس ها
۱	۱ و ۱ و ۱
۳	۱ و ۲ و ۱
۳	۲ و ۲ و ۱
۱	۲ و ۲ و ۲ *
۶	۱ و ۲ و ۳
۶	۱ و ۴ و ۳
۳	۳ و ۳ و ۱
۳	۳ و ۳ و ۲ *
۳	۳ و ۲ و ۲ *
۳	۱ و ۱ و ۴
۳	۱ و ۱ و ۵
۳	۱ و ۱ و ۶
۶	۴ و ۲ و ۱
۶	۵ و ۲ و ۱
۵۰	

اشاره: در شماره قبل درباره مقدمات و مفاهیم اولیه احتمال مانند پدیده تصادفی، فضای نمونه ای و پیشامد تصادفی بحث کردیم، همچنین پیشامد $A \cap B$ یعنی رخداد توأم A و B را بررسی کردیم. اکنون پیش از ادامه بحث احتمال شرطی، به حل سه تمرین طرح شده در پایان قسمت اول می پردازیم:



حل تمرین ۱: الف. سه تاس را ریخته ایم می خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه اول باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان از ۹ کمتر است، پس پیشامدی که رخ داده، یعنی مجموع کمتر از ۹ را B فرض می کنیم و پیشامد این را که هر سه اول باشند، A در نظر می گیریم و با استفاده از رابطه زیر احتمال را محاسبه می کنیم:

برای محاسبه تعداد حالات های این که مجموع سه تاس کمتر از ۹ باشد، از جدول زیر استفاده می کنیم:

$$p(A / B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

دو سکه T بیاید $A =$

$$B = \{(T, T, T), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

$$A = \{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\}$$

$$n(A \cap B) = 3, n(B) = 7 \Rightarrow p(A/B) = \frac{3}{7}$$

حل تمرین ۳: الف. طبق فرض در جعبه ۴ مهره آبی، ۵

مهره قرمز و ۳ مهره سبز قرار دارد و سه مهره را تصادفی خارج کرده ایم و می خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه آبی باشند؛ به شرط آن که بدانیم هر سه هم رنگ هستند.

$B =$ هر سه مهره هم رنگ هستند

$A =$ هر سه مهره آبی باشند

$$n(B) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 16$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{4}{3} = 4$$

$$\Rightarrow p(A/B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

ب. در این حالت می خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد؛ به شرطی که بدانیم هیچ کدام قرمز نیستند.

$B =$ هیچ کدام از سه مهره قرمز نیستند

$A =$ ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد

$$n(B) = \binom{3+4}{3} = \binom{7}{3} = 35, A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 18 \Rightarrow p(A/B) = \frac{18}{35}$$

حال به بحث اصلی خودمان بازمی گردیم و برای شروع، مثال معروفی را طرح می کنیم که غالباً برداشت دیگری از آن شده و غلط تفسیر می شود.

مثال. دو تاس آبی و قرمز را با هم می ریزیم و پیشامد A را روشن شدن عدد زوج برای تاس آبی و پیشامد B را روشن شدن عدد فرد برای تاس قرمز تعریف می کنیم. مطلوب است احتمال آن که A و B با هم رخ بدهند.

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A مجموعه $A_1 = \{2, 3, 5\}$ را در نظر گرفته و در این صورت $A = A_1 \times A_1 \times A_1$ خواهد بود که $n(A) = 3^3 = 27$ ؛ اما فقط حالت هایی که در جدول در کنار آنها * قرار گرفته، $n(A \cap B) = 1 + 3 + 3 = 7$ پس تشکیل می دهند؛ بنابراین:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{7}{50}$$

ب. در این قسمت می خواهیم احتمال هر سه فرد را حساب کنیم؛ به شرط این که بدانیم مجموعشان ۷ است؛ پس مجموع ۷ را پیشامد B در نظر می گیریم که رخ داده است و هر سه فرد را پیشامد A فرض می کنیم:

$$1, 1, 5 \rightarrow 3$$

$$2, 1, 4 \rightarrow 6$$

$$3, 2, 2 \rightarrow 3 \Rightarrow n(B) = 15$$

$$3, 3, 1 \rightarrow 3$$

جمع حالت ها = ۱۵

در بین این ۱۵ حالت، فقط ۶ حالت وجود دارد که هر سه تاس فرد هستند (سه حالت برای $[1, 1, 5]$ و سه حالت برای $[3, 2, 1]$ ؛ پس $n(A \cap B) = 6$ ؛ بنابراین:

$$p(A/B) = \frac{6}{15}$$

حل تمرین ۲: الف. در پرتاب سه سکه می خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه H بیایند؛ به شرط آن که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

$B =$ حداقل یکی از سکه ها H است

$A =$ هر سه سکه H بیاید

$$B' = \text{هر سه سکه T است} \Rightarrow n(B') = 1 \Rightarrow n(B) = 2^3 - 1 = 7$$

$$(A \cap B) = \{(H, H, H)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow p(A/B) = \frac{1}{7}$$

ب. در این حالت می خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که دو سکه T بیاید به شرط آن که بدانیم حداکثر دو سکه H است.

(هر سه سکه H است $B' =$) حداکثر دو سکه H است $B =$

(توجه دارید که احتمال رخداد پیشامد B به شرط آن که خودش رخ داده باشد؛ یعنی $p(B/B)$ برابر با ۱ است) که $k = \frac{1}{p(B)}$ به دست می‌آید و اگر این مقدار در رابطه (۱) قرار

دهیم، خواهیم داشت: $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ ، که می‌توان آن را به صورت زیر ساده کرد:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

پیش از این که تعریف پیشامدهای مستقل و وابسته را مطرح کنیم، یادآوری می‌کنیم که دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم؛ در صورتی که $(A \cap B) = \emptyset$ و سازگار می‌نامیم هرگاه $(A \cap B) \neq \emptyset$.

پیشامدهای مستقل از هم:

دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم؛ هرگاه رخداد یا عدم رخداد هریک، روی رخداد دیگری هیچ تأثیری نداشته باشد؛ در غیر این صورت دو پیشامد را وابسته می‌نامیم.

مثال ۱. فرض کنیم تاسی را دوبار ریخته‌ایم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم ریخته‌ایم)، اگر پیشامد A را زوج آمدن تاس اول و پیشامد B را فرد آمدن تاس دوم تعریف کنیم، با توجه به تعریف، واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند؛ یعنی این که تاس اول زوج بیاید یا زوج نیاید، تأثیری در فرد آمدن تاس دوم ندارد و برعکس.

مثال ۲. فرض کنید یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم و دو پیشامد A و B را به ترتیب «زوج آمدن تاس» و «رو شدن H» در نظر بگیریم؛ واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند. توجه دارید که A و B هر دو متعلق به فضای نمونه‌ای و ۱۲ عضوی S هستند.

$$A = \{(a, b) \in S \mid a \in \{2, 4, 6\}, b \in \{H, T\}\}$$

$$B = \{(a, b) \in S \mid a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{H\}\}$$

تذکر مهم: با توجه به تعریف پیشامدهای مستقل از هم،

حل: در واقع باید $p(A \cap B)$ را به دست آوریم. لازم به تذکر است اگر شما پیشامد A را به صورت $A = \{2, 4, 6\}$ و پیشامد B را به صورت $A = \{1, 3, 5\}$ تعریف کنید، $(A \cap B) = \emptyset$ بوده و $p(A \cap B) = 0$ ؛ در صورتی که می‌دانیم A و B می‌توانند با هم رخ بدهند و احتمال آن صفر نیست، و اشکال در این است که ما باید همواره A و B را از یک فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم؛ زیرا تابع احتمال روی یک فضای تعریف می‌شود و فضای نمونه‌ای در این مسأله، دارای ۳۶ زوج مرتب است؛ بنابراین باید A و B را به صورت‌های زیر تعریف کنیم:

$$A = \{(a, b) \in S \mid a \in \{2, 4, 6\}, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$$B = \{(a, b) \in S \mid a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$n(A) = 3 \times 6 = 18, \quad n(B) = 6 \times 3 = 18$$

$$A \cap B = \{(a, b) \in S \mid a \in \{2, 4, 6\}, b \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

در این مرحله، با توجه به مطالب ذکر شده و مثال‌های حل شده قبل، به راحتی می‌توان برای احتمال شرطی، مدلی به صورت زیر طراحی و به فرمولی که قبلاً از آن استفاده شد، برسیم: فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند؛ به طوری که $A \cap B \neq \emptyset$ (مطابق شکل)، به وضوح مشاهده می‌شود که اگر پیشامد B رخ داده باشد و بخواهیم احتمال رخداد A را به شرط آن که B رخ داده باشد، حساب کنیم؛ یعنی بخواهیم $p(A/B)$ را به دست آوریم، این احتمال با احتمال رخداد $(A \cap B)$ رابطه مستقیم دارد؛ یعنی

$$p(A/B) = kp(A \cap B) \quad (۱)$$

(هرقدر اشتراک A و B بیشتر باشد، چون B رخ داده، به همان نسبت $p(A/B)$ بزرگ‌تر و هرقدر اشتراک A با B کمتر باشد، $p(A/B)$ کوچک‌تر است). حال اگر قرار دهیم

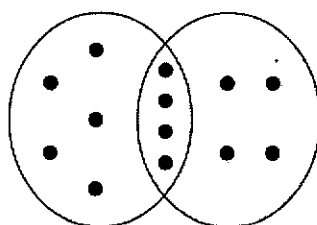
$$A = B, \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\text{به صورت}$$

$$p(B/B) = kp(B \cap B)$$

$$\text{یا } 1 = kp(B) \quad \text{حاصل}$$

می‌شود.



طرح یک مسأله بسیار مهم

فرض کنید تاسی را دوبار می ریزیم و پیشامدهای A و B را در دو حالت به صورت های زیر تعریف می کنیم. در هر حالت مستقل یا وابسته بودن A و B را ابتدا از طریق تعریف و سپس با استفاده از تساوی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ تحقیق کنید.

(الف) $\begin{cases} \text{پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید } A \\ \text{پیشامد این که مجموع دو تاس ۹ باشد } B \end{cases}$

واضح است که اگر تاس ۴ نیاید (A رخ ندهد) و مثلاً ۱ یا ۲ بیاید، امکان رخداد B وجود ندارد (تاس دوم حداکثر ۶ هم که بیاید، مجموع دو تاس ۹ نخواهد شد)، پس عدم رخداد A روی B تأثیرگذار است و لذا A و B وابسته اند.

از طرفی داریم:

$$A = \{(a, b) \in S \mid a = 4, b \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$$

$$B = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}, A \cap B = \{(4, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

B و A

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} = P(A \cap B) \Rightarrow \text{وابسته اند.}$$

(ب) $\begin{cases} \text{پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید } A \\ \text{مجموع دو تاس ۷ باشد } B \end{cases}$

در نگاه اول، قسمت (ب) با (الف) فرقی ندارد و شاید این طور به نظر برسد که عدم رخداد A، یعنی این که تاس اول ۴ نیاید، روی رخداد B تأثیرگذار است؛ ولی ابداً این طور نیست؛ زیرا تاس اول ۴ بیاید یا نیاید، روی مجموع ۷ تأثیری ندارد (تاس اول هر عدد غیر از ۴ نیز که بیاید، برای مجموع ۷ امکان وجود دارد) پس A و B مستقل از یکدیگرند. حال از طریق

واضح است که اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند و B رخ داده باشد، تأثیری در رخداد A ندارد و اگر A رخ داده باشد، تأثیری در رخداد B ندارد؛ یعنی می توان نوشت:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل از یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{cases}$$

نتیجه گیری مهم: قبلاً ثابت کردیم که

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) \text{ یا } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

که با توجه به تذکر قبل می توان گفت:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل از یکدیگرند} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(بنابراین یکی از راه های بررسی این که دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S مستقل از یکدیگرند یا وابسته اند، بررسی برقراری تساوی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است.)

در واقع تساوی $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ به نام قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد A و B در حالت کلی نام دارد و در حالتی که A و B مستقل از یکدیگر باشند، به صورت $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ نوشته می شود.

به عنوان مثال، برای فهم بیشتر این نتیجه مهم، به مثال ابتدای این بحث بر می گردیم:

در مثال ۱، یعنی ریختن ۲ تاس (یا ۱ تاس دوبار)، اگر بخواهیم A و B با هم رخ بدهند، یعنی تاس اول زوج و تاس دوم فرد بیاید، خواهیم داشت:

$$A = \{(a, b) \in S \mid a \in \{2, 4, 6\}, b \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$$

$$B = \{(a, b) \in S \mid a \in \{1, 2, \dots, 6\}, b \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$n(A) = 3 \times 6 = 18, \quad n(B) = 6 \times 3 = 18$$

$$(A \cap B) = \{(a, b) \in S \mid a \in \{2, 4, 6\}, b \in \{1, 3, 5\}\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

در نتیجه A و B مستقل از یکدیگرند.

فرمول، این موضوع را بررسی می‌کنیم:

$$n(A) = 6, B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(4, 3)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}, P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

پس A و B مستقل از یکدیگرند.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= 0 \\ P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) \times P(B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = 0 \text{ یا } P(B) = 0$$

به عبارت دیگر، اگر A و B هر دو پیشامدهای غیرممکن نباشند؛ یعنی $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ ، در این صورت نمی‌توانند مستقل از هم و در عین حال ناسازگار باشند.

در مسأله قبل، مشاهده کردید که $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (در هر

دو حالت (الف) و (ب) پس A و B در هر دو حالت سازگارند، ولی در حالت (الف) وابسته و در حالت (ب) مستقل از هم بودند. پس دو پیشامد سازگار می‌توانند مستقل یا وابسته باشند.

در قسمت بعدی، به معرفی چند رابطه و قانون مهم و کاربردهای آنها در حل مسائل احتمال شرطی خواهیم پرداخت.

رابطه بین پیشامدهای مستقل و وابسته با پیشامدهای سازگار و ناسازگار

دیدیم که اگر A و B ناسازگار باشند $(A \cap B) = \emptyset$ و $P(A \cap B) = 0$ ، پس اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و مستقل از هم باشند، باید لافل یکی از دو پیشامد غیرممکن باشد؛ زیرا:

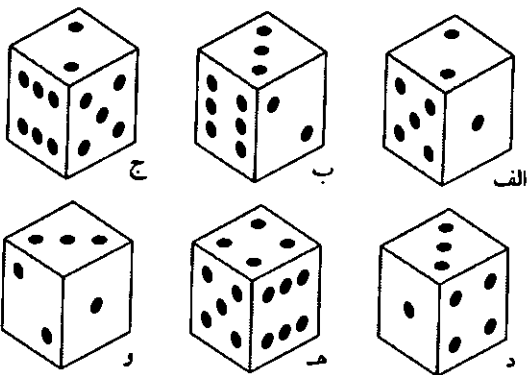


تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

نماهای تاس‌های متفاوت

این شش شکل، مربوط به دو تاس متفاوت است. هر مجموعه سه تایی از اینها (شش شکل) نماهای یکی از این دو

تاس را نشان می‌دهند. این تاس‌ها استاندارد نیستند (تاس استاندارد یا معمولی، به تاسی گفته می‌شود که مجموع خال‌های هر دو وجه مقابل آن، ۷ باشد. برای مثال، وجه ۱ مقابل وجه ۶، و وجه ۲ مقابل وجه ۵ و وجه ۳ مقابل وجه ۴ باشد-م). هر سه شکلی را که متعلق به یکی از این دو تاس است، مشخص کنید.



(۵، ۴، ۳) هـ (۶، ۵، ۴) و (۱، ۲، ۳) الف