



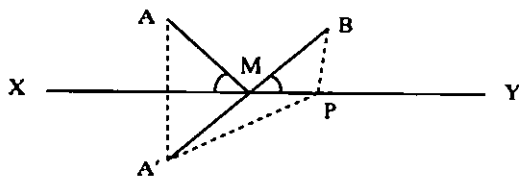
اثبات یکتا بودن جواب در حلّ یک مسأله هندسه

● دکتر احمد شرف الدین

برای حل این مسأله نقطه A' قرینه نقطه A را نسبت به خط XY به دست می آوریم. نقطه مطلوب M محل برخورد خط $A'B$ با خط XY است. چه اگر نقطه $P \neq M$ را بر خط XY اختیار کنیم، چنین داریم:

$$PA + PB = PA' + PB > A'B = A'M + MB = MA + MB$$

اگر نقطه مطلوب باشد، چنین داریم:
اندازه زاویه $AMX = BMY$ اندازه زاویه



۲- تعریف مثلث ارتفاعی: در مثلث ABC ارتفاعهای AD ، BE و CF را رسم می کنیم. مثلث DEF که رأسهای آن پایهای ارتفاعهای مثلث ABC می باشد، مثلث ارتفاعی مثلث ABC نامیده می شود.

چکیده: یکی از مسائل مشهور هندسه، محاط کردن مثلثی با محیط مینیمم در یک مثلث مفروض است که زاویه های آن حاده باشند. حلی که برای این مسأله عرضه شده است، مثلثی را که رأسهای آن پایهای سه ارتفاع مثلث مفروضند، به عنوان جواب معرفی می کند. ما در این مقاله، حلی را ارائه می کنیم که علاوه بر همان جواب، نشان می دهد که جواب یکتاست.

مسأله: در مثلث مفروض ABC که زاویه های آن حاده اند، مثلث DEF را چنان محاط کنید که رأسهای D ، E و F آن به ترتیب بر پاره خطهای BC ، AC و AB قرار داشته باشند و محیط آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ابتدا راه حلی را که در کتابها مذکور است، یاد می کنیم و سپس راه حلی را که یکتا بودن جواب را نیز نشان می دهد، ارائه می کنیم.

حل اول

برای حل مسأله، مطالب زیر را به ترتیب ذکر می کنیم:

۱- خط XY و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروض اند. بر خط XY نقطه M را چنان تعیین کنید که مجموع $(MA + MB)$ مینیمم باشد.

اندازه زاویه هاست. :

$$(۷) \angle FDB = \angle EDC$$

$$(۸) \angle DFB = \angle EFA$$

$$(۹) \angle FEA = \angle DEC$$

۵ - مثلث محاط در مثلث ABC با محیط مینیمم: مثلث MNP محاط در مثلث ABC را در نظر می گیریم. بنابر (۴ - نتیجه) محیط مثلث MNP مینیمم است، اگر تساویهای زیر برقرار باشد (منظور اندازه زاویه هاست):

$$(۱۰) \angle PMB = \angle NMC$$

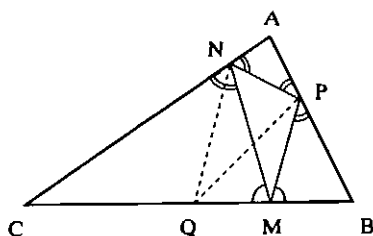
$$(۱۱) \angle MNC = \angle PNA$$

$$(۱۲) \angle NPA = \angle MPB$$

چه اگر به جای نقطه M نقطه Q را روی خط XY اختیار کنیم، بنابر مطلب شماره (۱) داریم:

$$QN + QP > MN + MP$$

همین شیوه استدلال را درباره وضعیت مناسب برای دو نقطه N و P به کار می بریم.



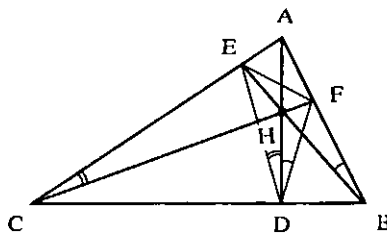
اکنون می گویم برای مثلث ارتفاعی، سه رابطه (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برقرار است؛ پس مثلث ارتفاعی دارای محیط مینیمم است.

حل دوم

در حل اول، ثابت شد که محیط مثلث ارتفاعی یک مثلث، دارای مینیمم است، اما این دلیلی نیست بر این که در بین مثلثهای محاط در مثلث مفروض، مثلثهای دیگری با محیط مینیمم وجود ندارد؛ چرا که می دانیم که یک تابع، ممکن است دارای چند مینیمم باشد. در شکل زیر، تاهی نشان داده شده است که دارای دو مینیمم است. (ممکن است دو مینیمم مساوی باشند). اکنون مثلث MNP محاط در مثلث ABC را در نظر می گیریم

۳ - حکم: ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه های مثلث ارتفاعی DEF اند.

برهان: در مثلث ABC سه ارتفاع AD، BE و CF را رسم می کنیم. می خواهیم ثابت کنیم خطوط AD، BE و CF به ترتیب زاویه های EDF، DEF و EFD اند.



چون دو زاویه CEB و CFB قائمه اند، پس دایره ای به قطر BC بر دو نقطه E و F می گذرد؛ یعنی چهارضلعی BCEF محاطی است. در این چهارضلعی محاطی، دو زاویه ECF و EBF دو زاویه محاطی مقابل به کمان EF اند؛ پس:

$$(۱) \text{ اندازه زاویه EBF} = \text{اندازه زاویه ECF}$$

نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث ABC را H می نامیم. چهارضلعی HFBD که دو زاویه مقابل آن، یعنی HFB و HDB قائمه اند، محاطی است. در این چهارضلعی محاطی، دو زاویه HDF و HBF دو زاویه محاطی مقابل به کمان HF اند؛ پس:

$$(۲) \text{ اندازه زاویه HBF} = \text{اندازه زاویه HDF}$$

همچنین چهارضلعی HDCE محاطی است؛ زیرا دو زاویه مقابل آن، یعنی HDC و HEC محاطی اند. در این چهارضلعی محاطی، دو زاویه HDE و HCE دو زاویه محاطی مقابل به کمان HE اند؛ پس:

$$(۳) \text{ اندازه زاویه HCE} = \text{اندازه زاویه HDE}$$

از سه رابطه (۱)، (۲)، (۳) نتیجه می شود:

$$(۴) \text{ اندازه زاویه HDE} = \text{اندازه زاویه HDF}$$

به همان شیوه استدلال ثابت می کنیم که:

$$(۵) \text{ اندازه زاویه HFE} = \text{اندازه زاویه HFD}$$

$$(۶) \text{ اندازه زاویه HED} = \text{اندازه زاویه HEF}$$

پس ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای مثلث ارتفاعی DEF اند.

۴ - نتیجه: چون AD، BE و CF ارتفاعهای مثلث ABC اند، از سه رابطه (۴)، (۵) و (۶) رابطه های زیر حاصل می شود (منظور

قوت ببرند؛ پس نقطه A روی خط MK قرار دارد و در نتیجه، خط AM محور اصلی دو دایره O_3 و O_4 است.

با همین شیوه استدلال، نتیجه می شود که خط CP محور اصلی دو دایره O_1 و O_2 است و همچنین خط BN محور اصلی دو دایره O_3 و O_4 است.

از طرفی می دانیم که سه محور اصلی سه دایره، از یک نقطه می گذرند (یکی از قضایای هندسه). پس سه خط AM، BN و CP بر یک نقطه می گذرند و این نقطه، همان نقطه K می باشد.

پس دایره های O_1 ، O_2 و O_3 بر نقطه K می گذرند لذا چهار ضلعیهای APKN، BMKP و CNKM محاطی اند. در چهار ضلعی محاطی KMBP دو زاویه KMP و KBP محاطی اند و مقابل به کمان KP اند؛ پس:

$$(17) \angle KMP = \angle KBP$$

در چهار ضلعی محاطی KMCN، دو زاویه محاطی KMN و KCN محاطی اند و مقابل به کمان KN اند؛ پس:

$$(18) \angle KMN = \angle KCN$$

همچنین در چهارضلعی محاطی BCNP، دو زاویه PBN و PCN محاطی اند و مقابل به کمان NP اند؛ پس:

$$(19) \angle PBN = \angle PCN$$

از سه رابطه (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) نتیجه می شود که:

$$(20) \angle PBN = \angle PCN$$

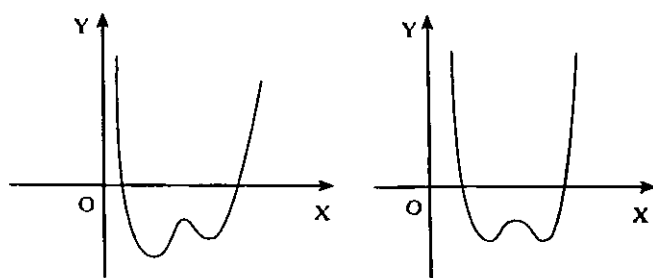
از رابطه های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) نتیجه می شود:

$$(21) \angle AMP = \angle AMN$$

از رابطه فوق با توجه به تساوی $\angle PMB = \angle NMC$ ، نتیجه می شود که خط AM بر خط BC عمود است.

با همین شیوه استدلال، نتیجه می شود که خطهای BN و CP به ترتیب بر خطهای AC و AB عمودند. نتیجه می شود که سه نقطه M، N و P که رأسهای مثلث با محیط مینیمم اند، همان رأسهای مثلث ارتفاعی اند.

حل دوم نشان می دهد که مسأله مورد نظر، فقط یک جواب دارد؛ یعنی فقط یک مثلث وجود دارد که در مثلث ABC محاط و محیط آن مینیمم می باشد.



و فرض می کنیم که محیط آن مینیمم باشد. در این صورت بنابر مطلب شماره (۱) چنین داریم:

$$(13) \angle BMP = \angle CMN$$

$$(14) \angle CNM = \angle ANP$$

$$(15) \angle APN = \angle BPM$$

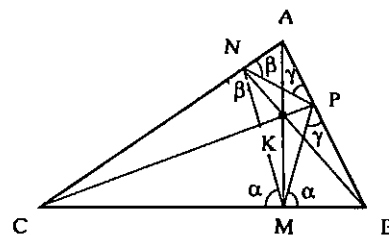
مقدار زاویه های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) را به ترتیب α ، β ، و γ می نامیم. روابط مسلم زیر را می نویسیم:

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + \gamma + \alpha = \alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$$

از رابطه های مذکور، نتیجه می شود:

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C$$

از تساوی $\beta = B$ نتیجه می شود که دو زاویه CNP و B مکمل یکدیگرند؛ پس چهارضلعی BCNP محاطی است. با همین شیوه استدلال، ثابت می شود که چهارضلعیهای CAPM و ABMN محاطی اند.



چون چهارضلعی BCNP محاطی است، پس بنابر قضیه قوت نقطه نسبت به دایره، چنین داریم:

$$(16) AP \cdot AB = AN \cdot AC$$

دایره های محیطی مثلثهای BMP و CMN را به ترتیب O_3 و O_4 می نامیم. نقطه برخورد دو دایره O_3 و O_4 به جز نقطه M را K می نامیم (ممکن است نقطه K روی M باشد). چون $AP \cdot AB = AN \cdot AC$ به ترتیب قوتهای نقطه A نسبت به دو دایره O_3 و O_4 می باشند و از طرفی بنابر رابطه (۱۶) این دو