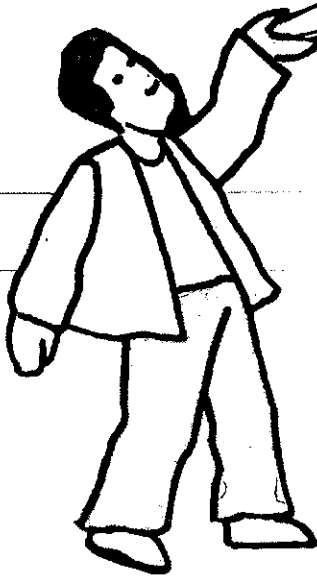


اثبات چند قضیه هندسه از راه‌های تازه و ساده

دکتر احمد شرف‌الدین

برای دانش آموزان سال سوم

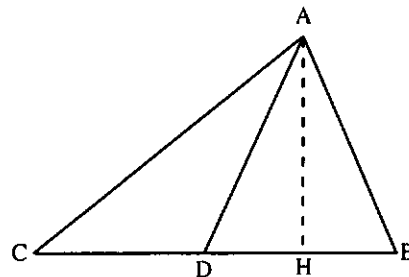


شماره ۱۴

دانش آموزان دوره متوسطه

در این مقاله، چند قضیه هندسه را از راه‌های جدید و ساده اثبات می‌کنیم. ممکن است این اثبات‌ها تازگی داشته باشند. ۱. قضیه. در هر مثلث، سه میانه همرأسند. برهان. برهان این قضیه را در چند مرحله انجام می‌دهیم:

الف) در هر مثلث، هر یک از میانه‌ها، آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت بخش می‌کند. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و میانه AD را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابرند.



از نقطه A عمود AH را بر خط BC فرود می‌آوریم.

پاره خط AH، هم ارتفاع مثلث ABD است و هم ارتفاع مثلث ACD. پس می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت مثلث ABD} = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AH}$$

$$\text{مساحت مثلث ACD} = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{AH}$$

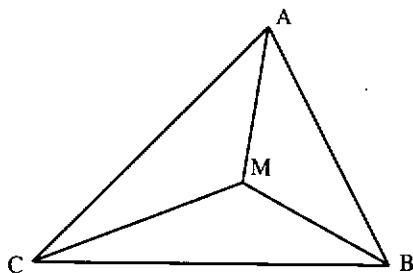
از مقایسه دو رابطه بالا، با رعایت آن که $\overline{BD} = \overline{CD}$ است (زیرا خط AD میانه مثلث است)، نتیجه می‌شود که دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند.

ب) مثلث ABC و میانه AD از آن را در نظر می‌گیریم. روی میانه AD نقطه دلخواه P را اختیار می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که دو مثلث APC و APB هم مساحت هستند.

ت) از آنچه در (پ) شرح دادیم، نتیجه می شود که روی هریک از سه میانه مثلث، نقطه ای وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی هم مساحت حاصل می شود.

ث) در داخل یک مثلث، فقط یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

مثلث ABC را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که نقطه M، نقطه ای است از درون مثلث؛ به طوری که:
 مساحت مثلث MCA = مساحت مثلث MBC = مساحت مثلث MAB

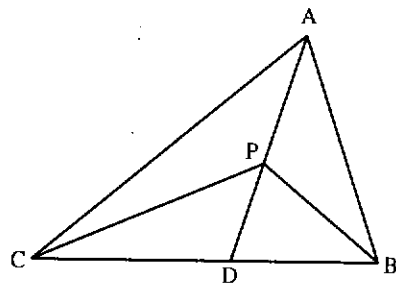


اگر نقطه ای چون P را داخل مثلث در نظر بگیریم که بر نقطه M منطبق نباشد، این نقطه P یا در درون یکی از سه مثلث های جزئی MAB، MBC، و MCA قرار دارد و یا داخل یکی از سه پاره خط MA، MB، و MC.

اگر نقطه P داخل یکی از مثلث های جزئی مثلاً داخل مثلث MBC قرار گیرد، آن گاه مساحت مثلث PBC کم تر از مساحت مثلث MBC می شود و در نتیجه، مساحت مثلث PBC یک سوم مساحت مثلث ABC نمی شود. بنابراین مساحت های سه مثلث PAB، PBC، و PCA برابر نمی شود.

اگر نقطه P درون یکی از سه پاره خط MA، MB، و MC، مثلاً درون پاره خط MA قرار گیرد، آن گاه مساحت مثلث PAB کمتر از مساحت مثلث MAB می شود و در نتیجه، مساحت مثلث PAB یک سوم مساحت مثلث ABC نمی شود. بنابراین مساحت های سه مثلث PAB، PBC، و PCA برابر نمی شوند.

پس داخل یک مثلث، تنها یک نقطه وجود دارد که اگر از

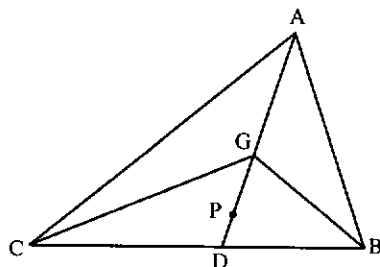


می گوئیم چون خط AD میانه مثلث ABC است، پس دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند. همچنین چون خط PD میانه مثلث PBC است، پس دو مثلث PBD و PCD هم مساحت هستند. نتیجه می شود که دو مثلث APB و ABC هم مساحت هستند.

پ) مثلث ABD و میانه AD را در نظر می گیریم. ادعا می کنیم که روی میانه AD نقطه ای چون G وجود دارد، به طوری که مساحت های سه مثلث GAB، GBC، و GCA برابرند.

روی میانه AD نقطه ای چون f نزدیک به نقطه D در نظر می گیریم و آن نقطه را روی میانه DA به سوی نقطه A حرکت می دهیم تا به نقطه ای چون G برسیم؛ به طوری که مساحت مثلث GBD ثلث مساحت مثلث ABC باشد (هنگامی که نقطه P از نزدیکی نقطه D به سوی نقطه A حرکت می کند، مساحت مثلث PBC از عددی نزدیک صفر زیاد می شود تا به مساحت مثلث ABC برسد. پس در لحظه ای مساحت مثلث PBC ثلث مساحت ABC می شود). در این لحظه، سه مثلث GAB، GBC، و GCA دارای یک مساحت هستند.

پس روی میانه AD یک نقطه یکتا چون G وجود دارد؛ به طوری که مساحت های سه مثلث GAB، GBC، و GCA برابرند.

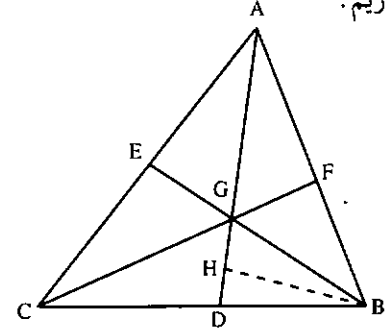


آن نقطه به سه رأس وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

ج) در بند (پ) ثابت کردیم که در درون مثلث یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی هم مساحت حاصل می شود. در بند (ث) ثابت کردیم که اگر چنین نقطه ای وجود داشته باشد، یکتاست.

چ) از آنچه داده شد، نتیجه می شود که سه میانه یک مثلث، از یک نقطه می گذرند و اگر از این نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت می شوند.

ح) در هر مثلث، سه میانه AD، BE و CF در یک نقطه G و چنین داریم:



$$\begin{cases} \overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{DA} \\ \overline{GE} = \frac{1}{3} \overline{EB} \\ \overline{GF} = \frac{1}{3} \overline{FC} \end{cases}$$

کافی است رابطه $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{DA}$ را ثابت کنیم. دو مثلث ABD و GBC را در نظر می گیریم. ثابت کردیم که مساحت مثلث GBC یک سوم مساحت مثلث ABD است. از نقطه B عمود BH را بر خط AD فرود می آوریم. پاره خط BH هم ارتفاع مثلث CBD است و هم ارتفاع مثلث ABD.

ما چنین می نویسیم:

$$\text{مساحت مثلث ABD} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{BH}$$

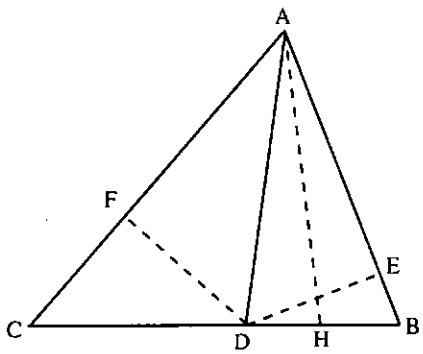
$$\text{مساحت مثلث GBC} = \frac{1}{2} \overline{GD} \cdot \overline{BH}$$

از مقایسه دو رابطه اخیر، با رعایت آن که مساحت مثلث GBD یک سوم مساحت مثلث ABD است، نتیجه می شود که $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{DA}$.

با همین شیوه استدلال، نتیجه می شود که: $\overline{GF} = \frac{1}{3} \overline{FC}$ و $\overline{GE} = \frac{1}{3} \overline{EB}$.

۲. قضیه. در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه روه را به نسبت دو ضلع دیگر بخش می کند. برهان. در مثلث ABC، خط AD نیمساز زاویه A را رسم می کنیم. می خواهیم ثابت کنیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



از نقطه D پای نیمساز AD عمود DE را بر خط AB و عمود DF را بر خط AC فرود می آوریم. چنین داریم:

$$(۱) \text{ مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DE}$$

$$(۲) \text{ مساحت مثلث ACD} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{DF}$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) رابطه (۳) حاصل می شود:

پس $y' \equiv 0$ ، یعنی برای تمام مقادیر متغیر x ، مقدار مشتق تابع (۲) برابر صفر است؛ پس تابع مشتق $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ ثابت است. برای تعیین این مقدار ثابت، کافی است مقدار این تابع را برای یک مقدار دلخواه از متغیر x حساب کنیم. مثلاً مقدار تابع را برای $x = 0$ حساب می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$(۴) \sin 0 = 0 \text{ و } \cos 0 = 1$$

اگر مقادیر (۴) را در عبارت $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ بپریم، حاصل می‌شود:

$$(۵) (\sin^2 0 + \cos^2 0) = 1$$

نتیجه می‌شود که عبارت $\sin^2 x + \cos^2 x$ برای تمام مقادیر x برابر (۱) است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC چنین داریم:

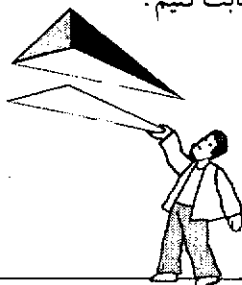
$$(۶) \sin B = \frac{AC}{BC} \text{ و } \cos B = \frac{AB}{BC}$$

از رابطه‌های (۶) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}$$

و چون ثابت کردیم $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ ، پس $\frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1$ یا $AC^2 + AB^2 = BC^2$ و این همان

است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



تذکر: اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ به کمک قضیه فیثاغورث ثابت می‌شود. آن را به کمک مشتق ثابت کردیم و سپس به کمک این اتحاد، قضیه فیثاغورث را ثابت کردیم.

$$(۳) \frac{\text{مساحت مثلث } ABD}{\text{مساحت مثلث } ABC} = \frac{AB}{AC}$$

زیرا $\overline{DE} = \overline{DF}$ (به دلیل آن که نقطه D روی نیمساز AD است، لذا از دو ضلع زاویه BAC به یک فاصله است). اکنون عمود AH را از نقطه A بر خط BC فرود می‌آوریم. دو رابطه زیر برقرار است:

$$(۴) \text{مساحت مثلث } ADB = \frac{1}{2} \overline{DB} \cdot \overline{AH}$$

$$(۵) \text{مساحت مثلث } ADC = \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AH}$$

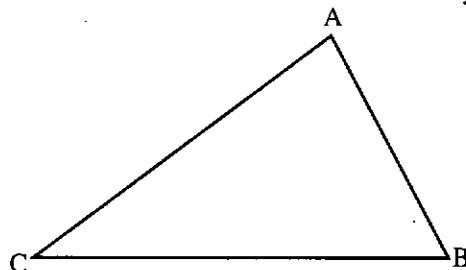
از مقایسه دو رابطه (۴) و (۵) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(۶) \frac{\text{مساحت مثلث } ADB}{\text{مساحت مثلث } ADC} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

از مقایسه دو رابطه (۳) و (۶) رابطه مطلوب زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

۳. قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع مجاور به زاویه قائمه. برهان. مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر می‌گیریم که در آن BC وتر است. می‌خواهیم ثابت کنیم رابطه زیر برقرار است:



$$(۱) \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

برای اثبات رابطه (۱)، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۲) y = \sin^2 x + \cos^2 x$$

مشتق تابع (۲) را حساب می‌کنیم؛ حاصل می‌شود:

$$(۳) y' = 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos x \cdot \sin x$$