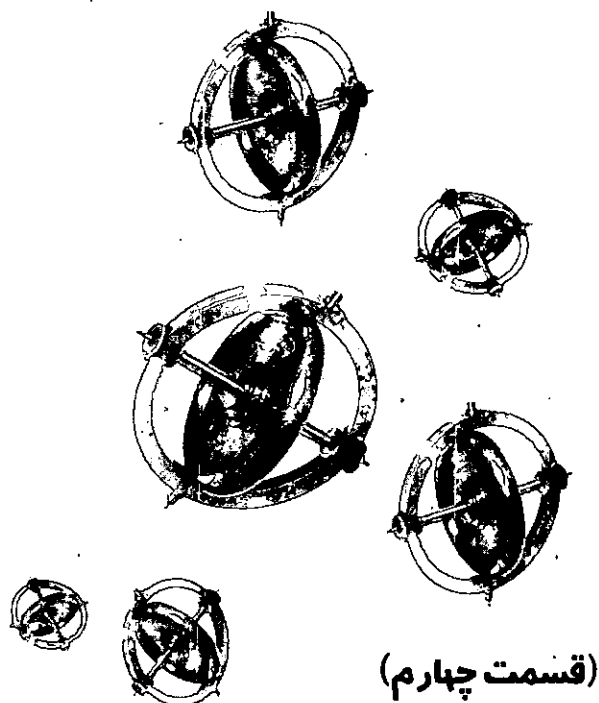


اثبات نامساویها به کمک قضیه

مقدار نگین میان

● محمدصادق عسگری



(قسمت چهارم)

مثال ۲۳: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$$

و:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1+a^2}{(1+ax)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1+a^2}{(1+ax)^2 + (x-a)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1+a^2}{a^2x^2 + x^2 + a^2 + 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

یعنی $f'(x) = g'(x)$ طبق نتیجه ۳ عدد ثابت c وجود دارد،

به طوری که $f(x) = g(x) + c$

$$\text{Arc tga} = \text{Arc tg} \left(\frac{x-a}{1+ax} \right) + \text{Arc tga} + c$$

اگر در رابطه بالا قرار دهیم $x = a$ ، در نتیجه داریم:

حل: بدون آن که کلیت مسأله از بین برود، می توان فرض کرد

$a < b$. تابع $f(x) = \cos x$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می گیریم، f پیوسته است و روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است. پس بنا بر قضیه مقدار میانگین نقطه c که $a < c < b$ وجود دارد که

$$\cos b - \cos a = (-\sin c)(b - a)$$

$$|\cos b - \cos a| = |-\sin c| |b - a|$$

چون $|\sin c| \leq 1$ است، پس:

$$|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$$

مثال ۲۴: الف - برای هر دو عدد حقیقی a و b ، ثابت کنید:

$$\text{Arc tg} \left(\frac{b-a}{1+ab} \right) = \text{Arc tgb} - \text{Arc tga}$$

ب - اگر $0 < a < b$ ، ثابت کنید:

$$\frac{b-a}{1+a^2} < \text{Arc tg} \left(\frac{b-a}{1+ab} \right) < \frac{b-a}{1+b^2}$$

حل: الف) قرار می دهیم $f(x) = \text{Arc tg} x$ و

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$$

$$f(t) = \ln(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln(1) - \ln x}{1 - x}, \quad x < c < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln x}{1 - x} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\ln x}{x - 1} = \frac{1}{c}$$

از $x < c < 1$ نتیجه می‌گیریم: $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ و $x - 1 < 0$.

بنابراین:

$$\Rightarrow 1 < \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

حالت دوم: فرض کنیم $x > 1$ باشد. در این صورت، تابع $f(t) = \ln t$ را روی بازه $[1, x]$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه مقدار میانگین، وجود دارد $1 < c < x$ به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{یا} \quad \frac{\ln x - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{c} \quad \text{از} \quad 1 < c < x$$

داریم $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ ، در نتیجه: $\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x - 1} < 1$ ؛ چون $x - 1 > 0$.

$$\text{بنابراین} \quad 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$$

مثال ۲۶: ثابت کنید برای هر $x \neq 0$ ، داریم

$$1 < \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}} < e$$

حل: فرض کنیم $x \neq 0$ دلخواه و پس از این، ثابت باشد.

تابع $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(t) = t^x$ را در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر است. پس طبق قضیه مقدار میانگین، نقطه $1 < c < 2$ وجود دارد؛ به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad \text{یا} \quad f'(c) = 2^x - 1$$

$$f(t) = t^x \Rightarrow f'(t) = xt^{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(c) = xc^{x-1} \Rightarrow 2^x - 1 = xc^{x-1}$$

$$\text{Arc tg}(a) = \text{Arc tg}(0) + \text{Arc tga} + c$$

یعنی $c = 0$ پس برای هر x داریم:

$$\text{Arc tg} x = \text{Arc tg} \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right) + \text{Arc tga}$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg} \left(\frac{x - a}{1 + ax} \right) = \text{Arc tg} x - \text{Arc tga}$$

حال اگر قرار دهیم $x = b$ ، داریم:

$$\text{Arc tg} \left(\frac{b - a}{1 + ab} \right) = \text{Arc tgb} - \text{Arc tga}$$

ب) تابع $f(x) = \text{Arc tg} x$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است. پس بنا بر قضیه مقدار میانگین وجود دارد: $a < c < b$ ؛ به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(x) = \text{Arc tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arc tgb} - \text{Arc tga}}{b - a} = \frac{1}{1 + c^2}$$

حال با فرض $0 < a < c < b$ داریم:

$$a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1 + a^2 < 1 + c^2 < 1 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + b^2} < \frac{1}{1 + c^2} < \frac{1}{1 + a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + b^2} < \frac{\text{Arc tgb} - \text{Arc tga}}{b - a} < \frac{1}{1 + a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b - a}{1 + b^2} < \text{Arc tgb} - \text{Arc tga} < \frac{b - a}{1 + a^2}$$

حال بنابر قسمت الف، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{b - a}{1 + b^2} < \text{Arctg} \left(\frac{b - a}{1 + ab} \right) < \frac{b - a}{1 + a^2}$$

مثال ۲۵: اگر $x > 0$ ثابت کنید: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$.

حل: حالت اول: فرض کنیم $0 < x < 1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. تابع $f(t) = \ln t$ را روی بازه $[x, 1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازه $[x, 1]$ مشتق پذیر است. پس طبق قضیه مقدار میانگین نقطه $x < c < 1$ وجود دارد؛ به طوری که

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) < x+1-1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

مثال ۲۹: فرض کنیم f تابعی حقیقی مشتق پذیر باشد و برای

هر x و y داشته باشیم: $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$. ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

حل: فرض کنیم $x = a$ یک عدد حقیقی دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض داریم:

$$|f(x) - f(a)| \leq (x - a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq |x - a|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq |x - a|$$

$$\Rightarrow -|x - a| \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq |x - a|$$

چون $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$ بنابر قضیه ساندویچ

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ ؛ یعنی $f'(a) = 0$. چون a دلخواه است،

در نتیجه برای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x) = 0$. در نتیجه، طبق نتیجه (۲)، f یک تابع ثابت است.

مثال ۳۰: با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نشان دهید:

$$0 < \int_0^1 \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx < \frac{\pi}{4}$$

حل: تابع $f(t) = \int_0^t \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx$ را روی بازه $[0, 1]$ در

نظر می گیریم. f پیوسته است و روی بازه $[0, 1]$ مشتق پذیر است. پس طبق قضیه مقدار میانگین نقطه $0 < c < 1$ وجود دارد؛ به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow f'(c) = f(1) - f(0)$$

حال داریم:

$$f(t) = \int_0^t \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx \Rightarrow f'(t) = \text{Arc tg}(\sqrt{t})$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(\sqrt{c}) = f(1) - f(0)$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(\sqrt{c}) = \int_0^1 \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx - \int_0^0 \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx$$

$$\Rightarrow \frac{2^x - 1}{x} = c^{x-1} \Rightarrow c = \left(\frac{2^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

چون $1 < c < 2$. در نتیجه داریم:

$$1 < \left(\frac{2^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}} < 2$$

مثال ۲۷: اگر $a < b$ ثابت کنید:

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

حل: تابع $f(x) = \ln x$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می گیریم.

f پیوسته است و روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین نقطه $a < c < b$ وجود دارد؛ به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

حال با فرض $0 < a < c < b$ داریم:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

مثال ۲۸: با فرض $x > -1$ ، ثابت کنید:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

حل: طبق مثال ۲۳ برای هر $x > 0$ ، داریم

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

حال فرض کنیم $x > -1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. قرار می دهیم $u = x + 1$ ، در نتیجه داریم: $u > 0$ و

$$u = x + 1 \text{ با قرار دادن } 1 - \frac{1}{u} < \ln u < u - 1$$

$$\Rightarrow \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۳: برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، نشان دهید:

$$\text{Arc tg } x + \text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2}$$

حل: تابع $f(x) = \text{Arc tg } x + \text{Arc cot } x$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته و مشتق‌پذیر است. و به علاوه

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$$

یعنی برای هر x ، داریم: $f'(x) = 0$. پس طبق نتیجه (۲)، f تابع ثابت است. در نتیجه، $f(x) = c$ یا $\text{Arc tg } x + \text{Arc cot } x = c$. اگر قرار دهیم $x = 0$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(0) + \text{Arc cot}(0) = c$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = c$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg } x + \text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۴: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت، وجود دارد $a < c < b$ ؛ به طوری که

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

حل: تابع $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم.

F پیوسته است و روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است. همچنین $F'(t) = f(t)$. پس بنابر قضیه مقدار میانگین، وجود دارد

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \quad \text{یعنی} \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx - 0}{b-a}$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx - 0}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

این مثال به نام قضیه مقدار میانگین برای انتگرال نیز معروف است.

مثال ۳۵: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و f تابعی حقیقی مشتق‌پذیر باشد، با فرض $f(a) = a$ و $f(-a) = -a$ و به ازای هر x ، داشته باشیم: $|f'(x)| \leq 1$ نشان دهید $f(0) = 0$.

حل: حالت اول: تابع f بر فاصله $[0, a]$ پیوسته و بر بازه $[0, a]$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیه مقدار میانگین، وجود

$$\Rightarrow \text{Arc tg}(\sqrt{c}) = \int_0^1 \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx$$

از $0 < c < 1$ ، داریم: $0 < \sqrt{c} < 1$. در نتیجه،

$$\text{Arc tg}(0) < \text{Arc tg}(\sqrt{c}) < \text{Arc tg}(1)$$

$$0 < \int_0^1 \text{Arc tg}(\sqrt{x}) dx < \frac{\pi}{4} \quad \text{بنابراین} \quad 0 < \text{Arc tg}(\sqrt{c}) < \frac{\pi}{4}$$

تذکر: مثال ۲۷ را می‌توان به کمک خواص انتگرال معین نیز حل کرد.

$$\text{مثال ۳۱: نشان دهید} \quad \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2) dx \right| \leq \frac{\pi}{2}$$

حل: تابع $f(t) = \int_0^t \sin(x^2) dx$ را روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ در

نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ مشتق‌پذیر

است و $f'(t) = \sin(t^2)$ ؛ چون $|\sin(t^2)| \leq 1$ ، بنابر نتیجه (۱)

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \right| \leq \left| \frac{\pi}{2} - 0 \right|$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2) dx - 0 \right| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2) dx \right| \leq \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۲: برای هر $-1 < x < 1$ ، ثابت کنید:

$$\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

حل: تابع $f(x) = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x$ را روی بازه

$[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازه $[-1, 1]$

مشتق‌پذیر است و به علاوه

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

یعنی برای هر $-1 < x < 1$ ، داریم $f'(x) = 0$. پس طبق نتیجه (۲)، f تابع ثابت است. بنابراین، عدد ثابت c وجود دارد؛ به طوری که $f(x) = c$ یا $\text{Arc sin}(x) + \text{Arc cos}(x) = c$. اگر قرار دهیم $x = 0$ ، داریم:

$$\Rightarrow \text{Arc sin}(0) + \text{Arc cos}(0) = c$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

پس طبق نتیجه (۱) برای تابع F داریم:

$$|F(b) - F(a)| \leq M|b - a| \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - 0 \right| \leq M(b - a)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$



ادب ریاضی

قبل از اقلیدس هندسه عبارت بود از مجموعه قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده‌اند و هیچ ارتباطی با یکدیگر نداشته‌اند و هیچ کس حتی حدس نمی‌زد که مجموعه این قواعد را ممکن است از عده بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. امروزه استدلال ریاضی تا آن حد جزو اساس و مبنای این علم به شمار می‌رود که حتی تصور این موضوع نیز برای ما ممکن نیست که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است.

ای. تی. بل

دارد $0 < c < a$ ؛ به طوری که $\frac{f(a) - f(0)}{a} = f'(c)$ ، چون $|f'(c)| \leq 1$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a) - f(0)}{a} \right| \leq 1 \Rightarrow |f(a) - f(0)| \leq a$$

$$\Rightarrow |a - f(0)| \leq a$$

$$\Rightarrow -a \leq a - f(0) \leq a$$

$$\Rightarrow -2a \leq -f(0) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 2a \Rightarrow f(0) \geq 0 \quad (*)$$

حالت دوم: تابع f روی بازه $[-a, 0]$ پیوسته و مشتق پذیر است. پس طبق قضیه مقدار میانگین، وجود دارد $-a < c' < 0$:

به طوری که $\frac{f(0) - f(-a)}{a} = f'(c')$ ، چون $|f'(c')| \leq 1$ ، در نتیجه:

$$\left| \frac{f(0) - f(-a)}{a} \right| \leq 1 \Rightarrow |f(0) - f(-a)| \leq a$$

$$\Rightarrow |f(0) + a| \leq a$$

$$\Rightarrow -a \leq f(0) + a \leq a$$

$$\Rightarrow -2a \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq 0 \quad (**)$$

از روابط $(*)$ و $(**)$ ، داریم $f(0) = 0$.

مثال ۳۶: فرض کنید f تابعی حقیقی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد؛ به طوری که برای هر x داشته باشیم $|f(x)| \leq M$ ، نشان دهید:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

حل: تابع $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر است؛ چون $F'(t) = f(t)$ و $|F'(x)| = |f(x)| \leq M$

