

اثبات نامساویها

● محمدعلی سلحشور

(دبیر ریاضی دبیرستانهای اصفهان)

باتوجه به آنکه $ab > 0$ داریم: $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ حالت تساوی وقتی است که $a=b$. بنابراین $2 - (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$ نامنفی است یعنی نامساوی برقرار است.

مثال ۳: ثابت کنید:

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$$

حل: تفاضل $(a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14) - (2a + 12b + 6c)$ را تشکیل می دهیم. این تفاضل را به شکل زیر سازمان می دهیم:

$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + 1$$

$$= (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + 1$$

که برای هر مقدار حقیقی a, b, c مثبت است. اثبات نامساوی بالا محقق است.

مثال ۴: نشان دهید اگر $a+b+c \geq 0$ آنگاه $a^2+b^2+c^2 \geq 3abc$

حل: تفاضل $a^2+b^2+c^2 - 3abc$ را تشکیل می دهیم. می دانیم:

$$a^2+b^2+c^2 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - ac - bc)$$

$$= \frac{1}{3} (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$$

$$= \frac{1}{3} (a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$$

باتوجه به فرض $a+b+c \geq 0$ عبارت جبری حاصل نامنفی است.

بنابراین نامساوی بالا برقرار است. توجه دارید که تساوی برای حالتی

است که $a=b=c$ یا $a+b+c=0$.

نامساویهایی که اعتبار آنها نیاز به اثبات با استفاده از گزاره های شناخته شده دارد در این بحث مورد بررسی قرار می گیرد. اگرچه گزاره ای که به آن استناد می شود اثبات نشده باشد اما این معنا را دارد که برای هر مقدار حقیقی درست است.

الف: اثبات نامساوی بر اساس تعریف

چنانچه از تعریف برمی آید $a > b$ یعنی $a-b$ برای هر مقدار حقیقی a و b مثبت است بنابراین در اثبات نابرابری:

$$f(a,b,...,k) > q(a,b,...,k)$$

برای همه مقادیر $a, b, k, \dots$ تفاضل $f(a,b,...,k) - q(a,b,...,k)$ را تشکیل و نشان می دهیم برای همه مقادیر $a, b, k, \dots$ مثبت است. این روش در اثبات نابرابریهای $f < q$ و $f \geq q$ و $f \leq q$ نیز کاربردی دارد.

مثال ۱: (نامساوی کوشی) ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad a \geq 0, b \geq 0$$

حل: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ را تشکیل و علامت آن را معین می کنیم.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

یعنی برای همه مقادیر حقیقی نامنفی a و b مثبت است و درحالتی که $a=b$ صفر است. یعنی:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{یا} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$$

مثال ۲: نشان دهید اگر $ab > 0$ آنگاه $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

حل:

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$2ab - 2ac - 2bc < 0 \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 < 0$$

این نتیجه که مجموع چند مربع است نادرست است. بنابراین نقض حکم درست نیست و نامساوی (۱۰) برقرار می‌باشد.

توضیح: اعداد نامنفی $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر بگیرید. کمتهای زیر را داریم:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad \text{واسطه هندسی}$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{واسطه همساز}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \text{میانگین مربع از اعداد } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{میانگین حسابی}$$

رابطه زیر بین این کمتهای برقرار است:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

د: اثبات نامساویها با استفاده از استقراء:

مثال ۱۱: نشان دهید اگر $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه: $2^n > 2n + 1$
حل:

$$n=2 \rightarrow 2^2 > 2(2) + 1$$

$$n=k \rightarrow 2^k > 2k + 1 \quad \text{فرض استقراء}$$

$$n=k+1 \rightarrow 2^{k+1} > 2k+3 \quad \text{حکم استقراء}$$

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2(2k+1) = 4k+2 = (2k+2) + (2k-1)$$

$$\rightarrow 2^{k+1} > (2k+2) + (2k-1)$$

اما برای مقادیر طبیعی k ، $2k-1 > 0$ پس:

$$2^{k+1} > 2k+3$$

مثال ۱۲: نشان دهید اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)^n} &= \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{2-2}{2 \times 3} + \frac{2-3}{3 \times 4} + \dots + \\ \frac{n-(n-1)}{(n-1) \cdot n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

پایان اثبات!

ج: اثبات نامساوی با استفاده از برهان خلف:

مثال ۹: نشان دهید اگر $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و $c \geq 0$ و $d \geq 0$ آنگاه:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

حل: فرض کنید برای مقادیر a و b و c و d نامساوی (۹) برقرار نباشد یعنی:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

طرفین نامساوی مثبت هستند و می‌توان آنها را به توان ۲ رساند:

$$\rightarrow \sqrt{(a+c)(b+d)} < ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$$\rightarrow \sqrt{bc+da} < 2\sqrt{abcd} \rightarrow \frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$$

که با توجه به نامساوی کوشی نتیجه حاصل نادرست است. پس

نامساوی (۹) برقرار است.

مثال ۱۰: نشان دهید اگر $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و $c \geq 0$ آنگاه:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

حل: فرض می‌کنیم برای مقادیر a و b و c نامساوی (۱۰) برقرار نباشد و داشته باشیم:

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

از مربع کردن طرفین نامساوی به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \rightarrow (a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0 \rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) -$$

$$(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0 \rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 -$$



ادب ریاضی

و همان‌طور که ما امور محسوسه را مشاهده می‌کنیم و از این راه به پاره‌ای از احوال و اوضاع آنها دانش یقینی پیدا می‌کنیم و سپس بر اساس و بنیان این‌گونه احوال متیقنه دانشها و علوم صحیحی [به‌مانند هیأت و جز آن] بار کرده و استوار می‌نماییم پس همین‌طور اموری از روحانیات را مشاهده می‌کنیم و سپس اموری دیگر را بر اساس و پایه آنها نهاده و استوار می‌کنیم و کسی که راه و روش وی این نباشد او را از این دانش بهره‌ای نباشد و به‌زودی شکوک و تردیدها او را بازیچه خود قرار دهد.

حکمت‌الاشراق

هر تحقیقی که به ترتیب اشیا بستگی دارد تا از آگاهی به آن، دانستن، چیزهای دیگر حاصل گردد، بلکه هر تحقیقی که وابستگی آن به تألیفی باشد (خواه در آن ترتیب معینی ملحوظ شود یا خیر)، چنین تحقیقی، به‌شناختن مفرداتی (که در آن تألیف و ترتیب واقع شده است) محتاج است و نیاز تحقیق به‌شناختن مفردات، از هر جهت نیست، بلکه از آن جهتی است، که آن تألیف و ترتیب شایسته‌اند، که در آن، مفردات باشند، به‌همین دلیل اهل منطق به‌رعایت نمودن احوال معانی مفرد نیازمندند تا بدین وسیله به‌مراعات احوال تألیف دسترسی یابند.

اشارات و تنبیهات

ابوعلی سینا

اثبات: برای $n=1$ داریم $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$ که گزاره‌ای است درست.

حال فرض می‌کنیم برای $n=k$ ، درست باشد. (فرض استقراء)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} > \frac{k}{2}$$

باید نشان دهیم نامساوی (۱۲) برای $n=k+1$ نیز درست است. (حکم استقراء)

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}$$

$$S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} \right)$$

$$= S_k + P_k$$

$$P_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1}$$

P_k مجموع 2^k کسر است که هر کدام از $\frac{1}{2^{k+1}}$ بزرگترند. بنابراین:

$$P_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} +$$

$$\dots + \frac{1}{2^{k+1}} = 2^k \times \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$$S_k > \frac{k}{2}$$

یعنی:

$$P_k > \frac{1}{2} \rightarrow S_{k+1} = S_k + P_k > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$\rightarrow S_{k+1} > \frac{k+1}{2}$$

