

اثبات نادرستی

«ادامه منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی پور

□ دنباله مطالب قبل

مثال دیگر عبارت است از:

P	D
مسلمانند.	بعضی ایرانیها
S	بعضی ایرانیها
باهوشند	بنابراین، بعضی مسلمانها باهوشند.

که به صورت زیر علامتی می شود:

$$\begin{aligned} & (\exists x)[Dx \wedge Px] \\ & (\exists x)[Dx \wedge Sx] \\ \therefore & (\exists x)[Px \wedge Sx] \end{aligned}$$

این استدلال به ازای مدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل:

$$Da \wedge Pa$$

$$Da \wedge Sa$$

$$\therefore Pa \wedge Sa$$

است که درست است. اما به ازای مدلی شامل دو فرد a و b معادل است با:

$$(Da \wedge Pa) \vee (Db \wedge Pb)$$

$$(Da \wedge Sa) \vee (Db \wedge Sb)$$

$$\therefore (Pa \wedge Sa) \vee (Pb \wedge Sb)$$

که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Da»، «Db»، «Pa»، «Sb» و ارزش راستی F به «Pb» و «Sa» ثابت می شود که نادرست است. در این جا نیز استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

استدلال نادرست شامل سورها می تواند به ازای هر مدل دارای کمتر از k فرد درست باشد، هر چند که باید به ازای هر مدل شامل k یا بیشتر از k فرد نادرست باشد. در نتیجه دراستفاده از این روش برای اثبات نادرستی استدلالی شامل سورها ممکن است لازم شود که مدلهای بزرگتر و بزرگتر را بررسی کنیم، و طبیعتاً این سؤال مطرح می شود که: در سعی در اثبات نادرستی استدلالی از این نوع، مدلی با چه بزرگی را باید بررسی کنیم؟ برای این سؤال پاسخی از لحاظ تئوری رضایت بخش به دست آمده است. به این ترتیب که اگر استدلالی شامل n علامت محمولی مختلف باشد در این صورت اگر به ازای مدلی شامل 2^n فرد درست باشد، به ازای هر مدل درست است، یا از لحاظ عمومی درست است. این نتیجه تنها به ازای توابع گزاره ای یک متغیری برقرار است. و در مورد محمولات نسبی صادق نیست. این جواب گرچه از لحاظ تئوری رضایت بخش است از لحاظ عملی چندان مفید نیست، چه اگر می خواستیم در مورد درستی یا نادرستی هر یک از استدلالات مورد بحث قرار گرفته در این بخش، حالت از لحاظ تئوری قطعی را بررسی کنیم بایستی مدلهای شامل هشت فرد را بررسی می کردیم.

□ قضایای عمومی چندگانه

تا کنون توجه مان را به قضایای عمومی شامل تنها یک سور معطوف کرده ایم. قضیه عمومی که دقیقاً شامل یک سور باشد به قضیه عمومی یگانه^۱ موسوم است. اکنون به قضایای عمومی چندگانه^۲ که شامل دو یا بیشتر از دو سورند، می پردازیم. در کاربردمان از این عبارت، هر گزاره مرکب که مؤلفه هایش قضایای عمومی اند یک

صورتی که ظهور چهارم ظهوری آزاد است. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل ظهور آزاد و مقید متغیرات باشند. از طرف دیگر، جمع ظهورات متغیرات در قضایا باید مقید باشند، زیرا هر قضیه‌ای باید راست یا دروغ باشد.

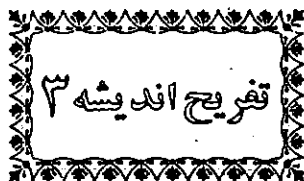
هر تابع گزاره‌ای باید دست کم یک ظهور آزاد از یک متغیر را در بر داشته باشد، در حالی که هیچ قضیه‌ای نمی‌تواند شامل ظهور آزاد متغیری باشد.

مرجع: Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها:

1. singly general proposition
2. multiply general propositions
3. free occurrence
4. bound occurrence

5. به طریق دیگر، اصطلاحات کمتر متداول متغیرهای «حقیقی» real variables، در مورد متغیرهای آزاد و متغیرهای «ظاهری» apparent variables، در مورد متغیرهای مقید به کار می‌رود.



مجموع یک عدد طبیعی و چهار عدد طبیعی متوالی بعدی آن ۱۰۵ است. حاصل تفاضل میانگین این اعداد را از میانه آنها بیابید.

جواب در صفحه ۳۹

قضیه عمومی چندگانه به حساب می‌آید. به عنوان مثال، شرطی «اگر تمام سگها گوشتخوار باشند در این صورت بعضی حیوانات گوشتخوارند» که به صورت:

$$(x) [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists x) [Ax \wedge Cx]$$

علامتی می‌شود، یک قضیه عمومی چندگانه است. قضایای عمومی چندگانه دیگر مرکب‌ترند و به علامت‌نویسی پیچیده‌تری نیاز دارند. برای توسعه علامت‌نویسی جدید باید بار دیگر به مفهوم تابع گزاره‌ای بازگردیم.

جمع توابع گزاره‌ای که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند به عنوان مثالهای جانشین، یا قضایای ماده یا ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی دارنده موضوعات یکسان را دارا بوده‌اند. اگر گزاره مرکبی را که مؤلفه‌هایش قضایای ساده دارای موضوعات مختلف، چون « $Fa \wedge Gb$ » می‌باشند، مورد رسیدگی قرار دهیم؛ می‌توانیم آن را به عنوان مثال جانشین تابع گزاره‌ای « $Fx \wedge Gx$ » یا تابع گزاره‌ای « $Fa \wedge Gx$ » در نظر بگیریم. ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای فردی به صورت اجزایشان باشند. و در صورتی که گزاره مرکبی را که در آن یک مؤلفه قضیه عمومی است و مؤلفه دیگر قضیه فردی، چون «اگر تمام سگها گوشتخوارند، در این صورت راور «Rover» گوشتخوار است» که به صورت « $(x) [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cr$ » علامتی می‌شود، بررسی کنیم، می‌توانیم آن را به صورت مثال جانشین تابع گزاره‌ای:

$$(x) [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

در نظر بگیریم. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای عمومی به صورت اجزایشان باشند. در این مرحله دو عبارت فنی جدید را می‌توان به طور کامل معرفی کرد. ظهور متغیر « x » را که در سور عمومی یا وجودی « (x) » یا « $(\exists x)$ » ظاهر نمی‌شود یا در برد آن قرار نمی‌گیرد؛ ظهور آزاد آن متغیر می‌نامیم. از طرف دیگر، ظهور متغیر « x » که یا قسمتی از یک سور است یا در برد سور « (x) » یا « $(\exists x)$ » قرار می‌گیرد ظهور مقید آن متغیر نامیده می‌شود.^۵ به این ترتیب در عبارت:

$$(x) [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

ظهور اول متغیر « x » جزئی از یک سور است و بنابراین مقید در نظر گرفته می‌شود. ظهورات دوم و سوم نیز ظهورات مقیدند، در