

# اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر

غلامرضا یاسی پور

۳.  $Hs \Rightarrow Ms$

۱. UI

۴. Ms

۲. M.P.

۲. تعمیم عمومی (توصیف مقدماتی): قانون بعدیمان را می‌توانیم با شباهتی که با روش ریاضی نسبتاً استاندارد زیر دارد توضیح دهیم. ممکن است هندسه‌دانی اثباتی را با گفتن این که «فرض می‌کنیم: ABC مثلث منتخب دلخواهی باشد» آغاز و بعد اثبات کند که مثلث ABC فلان صفت مشخص را دارد و در آخر نتیجه بگیرد که تمام مثلثها آن صفت را دارند. در این صورت نتیجه نهایی چگونه توجیه می‌شود؟ و چرا از مثلث ABC که خاصیت مشخصی را داراست نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای آن خاصیت هستند؟ جواب این است که اگر هیچ فرضی جز مثلث بودن در مورد ABC در نظر گرفته نشده باشد، در این صورت عبارت «ABC» می‌تواند برای نمایش هر مثلثی که مایل باشیم در نظر گرفته شود و اگر استدلال بر این قرار باشد که هر مثلث باید دارای صفت مورد بحث باشد، در این صورت نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای این صفت هستند. اکنون علامتی شبیه علامت این هندسه در اشاره به «هر مثلث منتخب دلخواه» معرفی می‌کنیم، و در این مورد حرف کوچک به کار نرفته «y» را برای نمایش دادن هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده به کار خواهیم برد.

در این استعمال عبارت «py» مثال جانشین تابع گزاره‌ای «px» است، و ادعا می‌کند که هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده دارای خاصیت p است. واضح است که «py» به درستی از «(x) px» توسط UI نتیجه می‌شود، زیرا آنچه که در مورد تمام افراد راست باشد در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده نیز راست است. این استنتاج به طور مساوی در

برای تشکیل دادن اثباتهای صوری درستی در مورد استدلالاتی که توسط سورها و توابع گزاره‌ای، علامتی شده‌اند؛ باید فهرست قوانین استنتاجمان را افزایش دهیم. برای این منظور چهار قانون حاکم بر تسویر را به فهرست اضافه می‌کنیم و گزارش مقدماتی بسیار ساده‌ای از آنان را در این بخش به دست می‌دهیم، و تنظیم کاملتر را برای بعد می‌گذاریم.

۱. تمثیل عمومی (توصیف مقدماتی): به علت این که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر تمام مثالهای جانشین آن تابع گزاره‌ای راست باشند، راست است، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که هر مثال جانشین یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از تسویر عمومی استنتاج کرد، اضافه کنیم. این قانون را می‌توانیم به طور علامتی به صورت:

$(x) \phi x$

$\therefore \phi V$

که در آن V علامت فرد دلخواهی است، بیان کنیم. از آن جا که این قانون اجازه می‌دهد مثالهای جانشین از تسویرهای عمومی استنتاج شوند، به آن به عنوان «اصل تمثیل عمومی»<sup>۱</sup> اشاره، و آن را به صورت «UI» خلاصه می‌کنیم.<sup>۲</sup> به این ترتیب افزودن UI مجازمان می‌کند که اثبات صوری درستی استدلال: «تمام انسانها میرا هستند؛ سقراط انسان است؛ بنابراین سقراط میراست»، را به ترتیب زیر به دست دهیم:

۱.  $(x) [Hx \Rightarrow Mx]$

۲. Hs

/  $\therefore Ms$

#### ۴. تمثیل وجودی (توصیف مقدماتی): به یک قانون

تسویر دیگر نیاز است. تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای اظهار می‌کند که حداقل یک فرد موجود است که قرار دادن نام آن به جای متغیر «x» در آن تابع گزاره‌ای، مثال جانشین راستی از آن به دست می‌دهد. البته ممکن است که چیز دیگری در مورد آن فرد ندانیم، اما می‌توانیم ثابت فردی دیگری جز «y»؛ مثلاً «W»، که قبلاً در آن زمینه رخ نداده در نظر بگیریم، و آن را برای نمایش دادن آن فرد، یا یکی از افرادی که وجودش توسط آن تسویر وجودی اظهار شده، بکار ببریم. با دانستن این که چنین فردی موجود است، و با موافقت کردن در نمایش آن با «W»، می‌توانیم از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای را نسبت به علامت فردی «W» استنتاج کنیم. به این ترتیب به عنوان آخرین قانون تسویرمان این اصل را بیفزاییم که از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای، می‌توانیم راستی مثال جانشینش را نسبت به یک ثابت فردی که قبلاً در آن زمینه رخ نداده است، به درستی استنتاج کنیم. این قانون جدید را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$(\exists x) \varphi x$$

$$\therefore \varphi V$$

که در آن V ثابتی فردی است، جز «y»، که قبلاً در بحث ظاهر نشده است. به این قانون به عنوان «اصل تمثیل وجودی»<sup>۵</sup> اشاره و آن را به صورت «EI» مختصر می‌کنیم.

از دو قانون تسویر اخیر در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال: «تمام سگها گوشتخوارند؛ بعضی حیوانات سگ‌اند؛ بنابراین بعضی حیوانات گوشتخوارند» استفاده می‌کنیم.

[سگ: D، گوشتخوار: C، حیوان: A]

$$1. (x) [Dx \Rightarrow Cx]$$

$$2. (\exists x) [Ax \wedge Dx] \quad / \therefore (\exists x) [Ax \wedge Cx]$$

$$3. Aw \wedge Dw \quad 2, EI$$

$$4. Dw \Rightarrow Cw \quad 1, UI$$

$$5. Dw \wedge Aw \quad 3, com.$$

$$6. Dw \quad 5, simp.$$

$$7. Cw \quad 4, 6, M.P.$$

$$8. Aw \quad 3, simp.$$

$$9. Aw \wedge Cw \quad 8, 7, conj.$$

$$10. (\exists x) [Ax \wedge Cx] \quad 9, EG$$

جهت دیگر نیز درست است، زیرا آنچه که در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده راست است باید در مورد تمام افراد راست باشد. باز هم فهرست قوانین استنتاجمان را، با افزودن این اصل که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان بدرستی از مثال جانشینش نسبت به علامت «y» استنتاج کرد افزایش می‌دهیم. از آن جاکه این قانون استنتاج قضایای کلی که تسویرهای عمومی‌اند را مجاز می‌کند، به آن به عنوان «اصل تعمیم عمومی»<sup>۲</sup> رجوع، و آن را به صورت «UG» مختصر می‌کنیم. عبارت علامتیمان در مورد این قانون تسویر دوم چنین است:

$$\varphi y$$

$$\therefore (x) \varphi x$$

که در آن «y» نمایشگر هر فرد به دلخواه انتخاب شده‌ای است، می‌باشد.

می‌توانیم این علامت جدید و این قانون اضافه یعنی UG را در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال زیر بکار ببریم: «هیچ میرایی کامل نیست؛ تمام انسانها میرا هستند؛ بنابراین انسانها کامل نیستند».

$$1. (x) [Mx \Rightarrow \sim Px]$$

$$2. (x) [Hx \Rightarrow Mx] \quad / \therefore (x) [Hx \Rightarrow \sim Px]$$

$$3. Hy \Rightarrow My \quad 2, UI$$

$$4. My \Rightarrow \sim Py \quad 1, UI$$

$$5. Hy \Rightarrow \sim Py \quad 3, 4, H.S.$$

$$6. (x) [Hx \Rightarrow \sim Px] \quad 5, UG$$

#### ۳. تعمیم وجودی (توصیف مقدماتی): به این علت که

تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای راست است اگر و تنها اگر آن تابع گزاره‌ای دارای حداقل یک مثال جانشین راست باشد، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از هر مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای استنتاج کرد، بیفزاییم. این قانون، استنتاج قضایای عمومی را که به طور وجودی تسویر یافته‌اند، مجاز می‌کند، بنابراین آن را «اصل تعمیم وجودی»<sup>۴</sup> می‌نامیم و به صورت «EG» مختصر می‌کنیم. تنظیم علامتی این اصل به صورت زیر است:

$$\varphi V$$

$$\therefore (\exists x) \varphi x$$

که در آن V هر علامت فردی است.

هر فرض با برد محدود را می‌توان در یک اثبات شرطی درستی به کاربرد، و بخصوص در گرفتن فرضی به صورت « $py$ » آزادیم. بدین ترتیب درستی استدلال «تمام دانشجویان سال اول و دوم دانشگاه دعوت شده‌اند و از آنها پذیرایی می‌شود؛ بنابراین تمام دانشجویان سال اول دعوت شده‌اند» با استفاده از اثبات شرطی زیر ثابت می‌شود:

[F: دانشجوی سال اول، S: دانشجوی سال دوم، I: دعوت داشتن W: پذیرایی شدن]

$$1. (x) [(Fx \vee Sx) \Rightarrow (Ix \wedge Wx)] / \therefore (x) [Fx \Rightarrow Ix]$$

$$2. Fy$$

$$3. (Fy \vee Sy) \Rightarrow (Iy \wedge Wy) \quad 1, UI$$

$$4. Fy \vee Sy \quad 2, Add.$$

$$5. Iy \wedge Wy \quad 3, 4, M. P.$$

$$6. Fy \quad 5, simp$$

$$7. Fy \Rightarrow Iy \quad 2-6, C. P.$$

$$8. (x) [Fx \Rightarrow Ix] \quad 7, UG$$

در اثبات درستی استدلال شامل تسویرات، همان طور که در مثال زیر ملاحظه می‌شود می‌توان بیش از یک فرض با برد محدود در نظر گرفت:

$$1. (x) [(Ax \vee Bx) \Rightarrow (Cx \wedge Dx)]$$

$$2. (x) \{ (Cx \vee Ex) \Rightarrow [(Fx \vee Gx) \Rightarrow Hx] \}$$

$$/ \therefore (x) [Ax \Rightarrow (Fx \Rightarrow Hx)]$$

$$3. (Ay \vee By) \Rightarrow (Cy \wedge Dy) \quad 1, UI$$

$$4. (Cy \vee Ey) \Rightarrow [(Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy] \quad 2, UI$$

$$5. Fy \Rightarrow Hy$$

$$6. Ay \vee By \quad 5, Add.$$

$$7. Cy \wedge Dy \quad 3, 6, M. P.$$

$$8. Cy \quad 7, simp.$$

$$9. Cy \vee Ey \quad 8, Add.$$

$$10. (Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy \quad 4, 9, M. P.$$

$$11. Hy$$

$$12. Fy \vee Gy \quad 11, Add.$$

$$13. Fy \quad 10, 12, M. P.$$

$$14. Ay \quad 11-13, C. P.$$

$$15. Ay \Rightarrow [Fy \Rightarrow Hy] \quad 5-14, C. P.$$

می‌توانیم لزوم محدودیت بیان شده در مورد استفاده از EI را با بررسی استدلال واضحاً نادرست زیر نشان دهیم: «بعضی گربه‌ها حیوان‌اند؛ بعضی سگ‌ها حیوان‌اند؛ بنابراین بعضی گربه‌ها سگ‌اند». در این مورد اگر از محدودیت مربوط به EI که مثال جانشین حاصل از آن تنها می‌تواند شامل ثابت فردی که قبلاً در زمینه بحث رخ نداده باشد، صرف نظر کنیم، ممکن است به تشکیل «اثبات» زیر رهنمون شویم:

[گربه: C، حیوان: A، سگ: D]

$$1. (\exists x) [Cx \wedge Ax]$$

$$2. (\exists x) [Dx \wedge Ax] / \therefore (\exists x) [Cx \wedge Dx]$$

$$3. Cw \wedge Aw \quad 1, EI$$

$$4. Dw \wedge Aw \quad 2, EI$$

$$5. Cw \quad 3, simp.$$

$$6. Dw \quad 4, simp.$$

$$7. Cw \wedge Dw \quad 5, 6, conj.$$

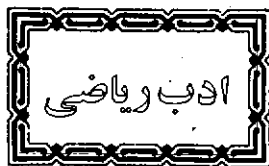
$$8. (\exists x) [Cx \wedge Dx] \quad 7, EG$$

در اینجا اشتباه در سطر ۴ رخ داده است. مقدمه دوم اطمینان می‌دهد که حداقل یک شیء موجود است که هم سگ و هم حیوان است. ولی ما مجاز نیستیم که از علامت «w» برای نمایش دادن آن شیء استفاده کنیم زیرا قبلاً «w» را برای نمایش دادن یکی از اشیایی که در مقدمه اول ادعا شده است که هم گربه و هم سگ حیوان‌اند به کار برده‌ایم. برای اجتناب از خطاهایی نظیر این خطا باید از محدودیت مقرر در کاربرد EI پیروی کنیم. باید توجه شود که هرگاه در اثباتی هم EI و هم UI در تمثیل نسبت به یک ثابت فردی به کار رود، باید اول EI را به کاربردیم. (چنین پیشنهاد شده که می‌توانیم از لزوم به کار بردن EI قبل از UI با تغییر محدودیت روی EI به صورت «که در آن U ثابتی فردی، غیر از «y» است که در زمینه بحث با هیچ یک از استفاده‌های قبلی از EI معرفی نشده است» اجتناب کنیم. اما حتی این صورت نیز جدا از دوری بودن آشکارش از تشکیل «اثبات صوری درستی» خطاآیز در مورد استدلالی نادرست چون «بعضی انسانها زیبا هستند. سقراط انسان است. بنابراین سقراط زیباست» جلوگیری نمی‌کند.)

چهار قانون تسویر EG، UI، UG، و EI را مانند قوانین استنتاج نه گانه قبلاً ذکر شده، می‌توان فقط در مورد سطرهای کامل اثبات به کاربرد.

۲. این قانون و سه قانونی که بعد می آیند قوانین مختلف «قیاس طبیعی» natural deduction اند که در سال ۱۹۳۴ میلادی توسط گرهارد گنتزن «Gerhard Gentzen» و مستقل از او استانیسلاو یاسکوفسکی «Stanislaw Jas'kowski» طرح شده اند.

3. Principle of Universal Generalization
4. Principle of Existential Generalization
5. Principle of Existential Instantiation



عدد اصم [alogos] عددی است که نمی توان آن را به صورت صحیح به وسیله اعداد دیگر تعبیر کرد؛ ابتدای این اکتشاف به صورت هندسی در آن هنگام بود که دریافتند قطر مربع واحد را نمی توان با ضلع یا اجزای آن هر اندازه هم که کوچک اختیار شده باشد اندازه گرفت.

آیا راه اثبات این اصم بودن چگونه است؟ روایتی را که در این باره است ارسطو نقل می کند، و راه اثبات آن را برهان خلف [reductio ad absurdum] می داند، این برهان به اندازه یی کوتاه و ساده است که ما آن را عیناً در این جا نقل می کنیم:

اگر مربعی با ضلع  $a$  و قطر  $c$  در دست باشد، می خواهیم ثابت کنیم که  $a$  و  $c$  نسبت به یکدیگر اندازه ناپذیرند. فرض کنیم که چنین نباشد و نسبت  $c/a$  میان آنها را به ساده ترین صورت با  $\gamma/\alpha$  نمایش دهیم، که بتأثر آن  $\gamma^2/\alpha^2 = c^2/a^2$  می شود؛ ولی  $c^2 = 2a^2$  و در نتیجه  $\gamma^2 = 2\alpha^2$  خواهد شد، به این ترتیب بایستی  $\gamma^2$  و همچنین  $\gamma$  زوج و  $\alpha$  فرد باشد. اگر  $\gamma$  زوج باشد می توان چنین نوشت:  $\gamma = 2\beta$  و از آن رو:  $4\beta^2 = 2\alpha^2$  و  $\beta^2 = \alpha^2/2$  و نتیجه رابطه اخیر آن است که  $\alpha^2$  و  $\alpha$  باید زوج باشد. از این قرار  $\alpha$  در آن واحد باید هم زوج باشد و هم فرد و این ممتنع و بالتجیه فرضی که در ابتدا شده بود باطل است، یعنی  $c/a$  اندازه ناپذیر است.

تاریخ علم - احمد آرام

$16. (x)[Ax \Rightarrow (Fx \Rightarrow Hx)]$

۱۵، UG

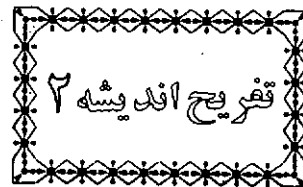
مرجع:

Symbolic Logic

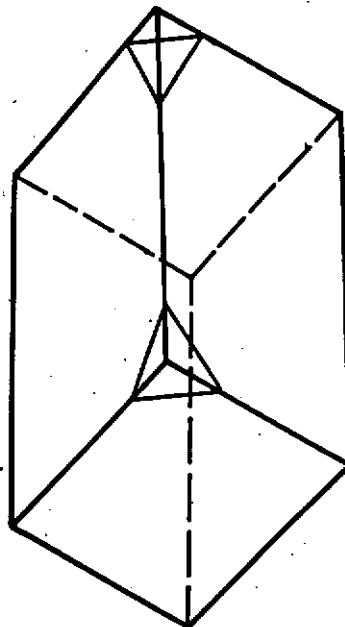
Irving M. Copi

یادداشتها:

1. Principle of Universal Instantiation



هر گوشه منشور مربع القاعده ای را بریده ایم. دوبرش از هشت برش ممکن را نشان داده ایم. شکل جدید دارای چند یال است؟



جواب در صفحه ۸۸