

اثبات شرطی

● غلامرضا یاسی پور

۱. قانون تقویت شده اثبات شرطی^۱:

در قسمتهای قبل * روش اثبات شرطی تنها در مورد استدلالهایی^۲ به کار رفت که نتایجشان^۳ صورت^۴ شرطی داشت. اما در فصل بعد راحت تر است که روشی شبیه به روش اثبات شرطی در مورد استدلالهایی که نتایجشان گزاره های شرطی^۵ واضح نیستند به کار رود. برای رسیدن به این مقصود قانون اثبات شرطی مان را تقویت می کنیم و از این رو به آن خاصیت عملی بودن و سیعتری می دهیم.

برای تنظیم قانون تقویت شده اثبات شرطی مان بی فایده نیست که در نوشتن اثباتها روش جدیدی را که از روش شرطی^۶ استفاده می کند بپذیریم. همان طور که در قسمتهای قبل توضیح داده شد، روش اثبات شرطی را برای اثبات درستی^۷ استدلالی که گزاره نلی شرطی به عنوان نتیجه داشت، با اضافه کردن مقدم^۸ آن گزاره شرطی به مقدمات^۹ استدلال به عنوان فرض^{۱۰}، و سپس استنتاج^{۱۱} تالی^{۱۲} آن گزاره شرطی، به کار می بردیم، و علامت گذاری بخش قبل شامل استفاده از یک خط مایل اضافی و یک علامت بنابراین اضافی، همان گونه که در اثبات درستی استدلال:

$$A \Rightarrow B$$

$$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

توسط اثبات چهار سطری زیر به کار می رود، بود:

$$1. A \Rightarrow B \quad \therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

$$2. A \quad \therefore A \wedge B \text{ (C.P.)}$$

$$3. B \quad 1, 2, \text{ M.P.}$$

$$4. A \wedge B \quad 2, 3, \text{ Conj}$$

اثبات شرطی درستی همین استدلال در علامت گذاری جدیدمان به صورت دنباله^{۱۳} پنج سطری زیر انجام می گیرد:

$$1. A \Rightarrow B \quad \therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

$$2. A \quad \text{فرض}$$

$$3. B \quad 1, 2, \text{ M.P.}$$

$$4. A \wedge B \quad 2, 3, \text{ Conj}$$

$$5. A \Rightarrow (A \wedge B) \quad 2, 4, \text{ C.P.}$$

در این جا سطر پنجم نه از یک یا دو سطر قبل بلکه از دنباله سطرهای ۲ و ۳ و ۴ که استنتاج درست سطر ۴ را از سطرهای ۱ و ۲ به دست می دهد استنتاج شده است. در سطر ۵ درستی استدلال:

$$A \Rightarrow B$$

$$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

را از درستی مبرهن^{۱۴} استدلال:

$$A \Rightarrow B$$

$$A$$

$$\therefore A \wedge B$$

استنتاج می کنیم. این استنتاج^{۱۵} با اشاره به دنباله سطرهایی که به آنها رجوع شده، و با به کار بردن حروف «C.P.» برای نشان دادن این که اصل اثبات شرطی به کار رفته است، «توجیه» می شود.

برد محدود بی اثر شد، می تواند فرض دیگری در نظر گرفته و سپس بی اثر شود. یا فرض با برد محدود دومی را می توان در داخل برد اولی نوشت. به این ترتیب بردهای مفروضات مختلف ممکن است پس از یکدیگر بیایند، یا یکی کاملاً داخل دیگری قرار گیرد.

اگر بُرد یک فرض تا انتهای یک اثبات نرسد، در این صورت سطر آخر به آن فرض بستگی ندارد، بلکه ثابت شده است که به تنهایی از مقدمات اصلی نتیجه شده است. در نتیجه لازم نیست که خود را محدود به استفاده از تنها مقدمه های نتایج شرطی به عنوان مفروضات کنیم، و هر گزاره^{۱۹} را می توان به عنوان فرضی با برد محدود در نظر گرفت، زیرا سطر نهایی که همان نتیجه است همیشه خارج برد آن و مستقل از آن خواهد بود.

برهان زیر، برهان پیچیده تری است که شامل دو مفروض است (چون در این مورد اگر علامت پیکان شکسته را به کار بریم، دیگر لازم نیست که کلمه «فرض» را بنویسیم، زیرا هر فرض به قدر کافی با سر پیکان مشخص می شود):

$$1. (A \vee B) \Rightarrow [(C \vee D) \Rightarrow E] \quad \therefore A [(\Rightarrow C \wedge D) \Rightarrow E]$$

2. A	
3. A $\vee$ B	2, Add
4. (C $\vee$ D) $\Rightarrow$ E	1, 3, M.P.
5. C $\wedge$ D	
6. C	5, simp
7. C $\vee$ D	6, Add
8. E	4, 7, M.P.
9. (C $\wedge$ D) $\Rightarrow$ E	5, 8, C.P.
10. A $\Rightarrow$ [(C $\wedge$ D) $\Rightarrow$ E]	2-9, C.P.

در این اثبات، سطرها ۲ تا ۹ در برد فرض اول قرار می گیرند، در حالی که سطرها ۵، ۶، ۷ و ۸ در برد فرض دوم واقع می شوند. از این دو مثال واضح است که برد مفروض α در

در اثبات اخیر سطرها ۳ و ۴ به سطر ۲ یعنی فرض بستگی دارند. اما سطر ۵ به سطر ۲ وابسته نیست بلکه فقط به سطر ۱ وابسته است. بنابراین سطر ۵ خارج یا ماورای برد^{۱۶} فرضی است که در سطر ۲ در نظر گرفته شده است. چون در اثبات شرطی درستی، فرضی در نظر گرفته می شود، «برداشت» همواره محدود^{۱۷} است، و هیچ گاه به آخرین سطر برهان^{۱۸} نمی رسد.

اکنون علامت گذاری را معرفی می کنیم که در مشخص کردن رد مفروضات و برد آنها بسیار مفید است. برای این منظور از پیکان شکسته بی که سرش از طرف چپ اشاره به فرض دارد و انتهایش در زیر آخرین سطر برد فرض واقع است استفاده می کنیم. به این ترتیب برد فرض اثبات قبل به ترتیب زیر مشخص می شود:

1. A $\Rightarrow$ B	$\therefore$	A $\Rightarrow$ (A $\wedge$ B)
2. A		فرض
3. B	1, 2,	M.P.
4. A $\wedge$ B	2, 3,	Conj
5. A $\Rightarrow$ (A $\wedge$ B)	2, 4,	C.P.

به این مطلب باید توجه شود که تنها، سطری که توسط اصل اثبات شرطی استنتاج شده است برد یک فرض را پایان می دهد، و هر بار استفاده از قانون اثبات شرطی به پایان دادن برد یک فرض کمک می کند. زمانی که برد یک فرض پایان گرفت می گوئیم: آن فرض بی اثر شده است، و دیگر هیچ سطر بعدی بی را نمی توان با مراجعه به آن یا هر سطر بین آن و سطر استنتاج شده از قانون شرطی بی که آن را بی اثر کرده، توجیه کرد. و تنها سطرها ۱ واقع بین یک فرض با برد محدود و سطری که آن را بی اثر کرده، را می توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با برد محدود و سطری که آن را بی اثر کرده، را می توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با

یادداشتها

* به شماره‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ برهان مراجعه شود.

1. The Strengthened Rule of Conditional Proof
2. Arguments
3. Conclusions
4. Form
5. Conditional Statements
6. Conditional Method
7. Validity
8. Antecedent
9. Premisses
10. Assumption
11. Deduce
12. Consequent
13. Sequence
14. Demonstrated Validity
15. Inference
16. Scope
17. Limited
18. Demonstration
19. Proposition
20. Formal Proof
21. Rules of Inference
22. Indirect Proof
23. Negation
24. Contradiction
25. Addition
26. Disjunctive Syllogism
27. Implication
28. Double Negation
29. Tautology

یک اثبات، شامل تمام سطرهای « تا φ که در آن سطر بعد از φ به صورت $\varphi \Rightarrow$ است و از آن دنباله سطرها با استفاده از C.P. استنتاج شده، می‌باشد. در مثال قبل، مفروض دوم در برد مفروض اول به این علت قرار می‌گیرد که بین مفروض اول و سطر ۱ که از دنباله سطرهای ۲ تا ۹ با استفاده از C.P. استنتاج شده، واقع است.

زمانی که روش جدید نوشتن اثبات شرطی درستی را به کار می‌بریم برد هر مقدمه اصلی تا پایان اثبات می‌رسد. این مقدمات اصلی را می‌توان با مفروضات اضافی به شرطی که برد آنها محدود باشد و به پایان اثبات نرسد، تکمیل کرد. هر سطر اثبات صوری^{۲۰} درستی باید یا مقدمه یا مفروضی با برد محدود باشد، و یا باید از یک یا دو سطر قبل و با استفاده از یکی از قوانین استنتاج^{۲۱} به درستی نتیجه شود، یا باید از دنباله‌ای از سطرهای قبل و با استفاده از اصل اثبات شرطی به دست آید.

به این مطلب باید توجه شود که اصل تقویت شده اثبات شرطی شامل روش اثبات غیرمستقیم^{۲۲} به عنوان حالتی خاص است، چه از آنجا که می‌توان هر مفروض برد محدودی را در اثبات شرطی درستی در نظر گرفت، می‌توانیم به عنوان مفروضمان نقیض^{۲۳} نتیجه استدلال را در نظر بگیریم، و زمانی که تناقض^{۲۴} یا کاذبی به دست آمد، می‌توانیم برای حاصل کردن نتیجه مطلوب با توجه به آن کاذب و با استفاده از جمع^{۲۵} و قیاس فاصل^{۲۶} به اثبات ادامه بدهیم. چون این عمل انجام شد، می‌توانیم از قانون اثبات شرطی برای پایان دادن به برد آن مفروض استفاده کنیم و شرطی به دست آوریم که تالش نتیجه استدلال و مقدمش نقیض آن نتیجه است. و از چنین شرطی نتیجه استدلال را با استفاده از استلزام^{۲۷}، نقیض دوگانه^{۲۸}، و صادق^{۲۹} حاصل کنیم.

از این جابه بعد، به قانون تقویت شده اثبات شرطی، به طور ساده به عنوان قانون اثبات شرطی اشاره خواهیم کرد.