

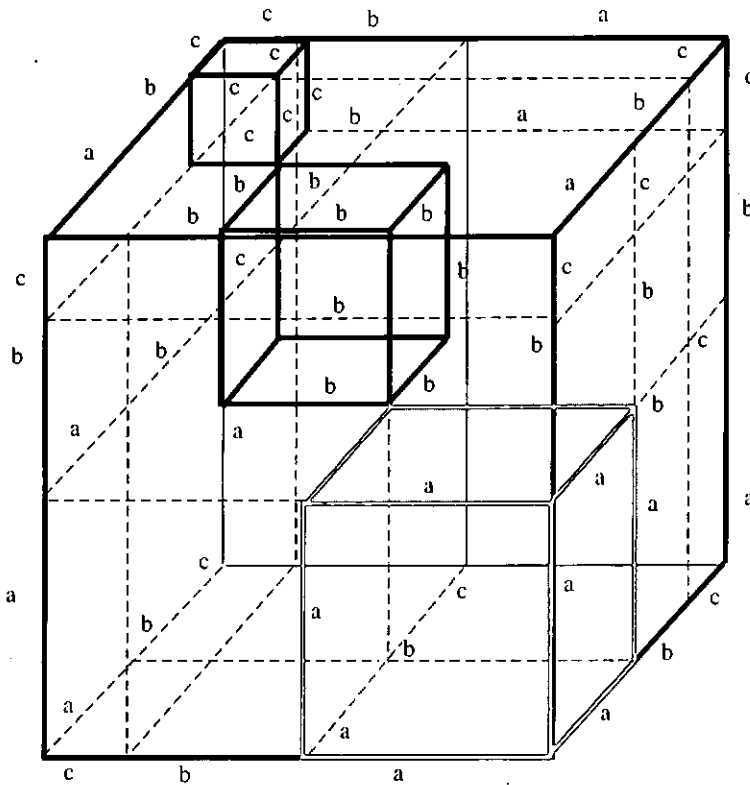


اثبات اتحادها به کمک هندسه

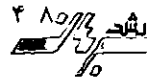
اثبات مکعب مجموع سه جمله ای

برای دانش آموزان سال اول متوسطه

✪ احمد قندهاری



در شماره قبل،
اثبات هندسی چند
اتحاد را ملاحظه
کردید. اینک در
ادامه، اثبات هندسی
و جبری اتحاد
مکعب مجموع سه
جمله ای را
می آوریم.



برای دانش آموزان دوره متوسطه

سه مکعب مستطیل به حجم a^3 ،

سه مکعب مستطیل به حجم b^3 و

سه مکعب مستطیل به حجم c^3 .

۳. شش مکعب مستطیل به حجم abc داریم. پس:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

توجه: اگر بخواهید کاملاً متوجه مسأله بشوید، باید مکعب اولیه را بسازید و روی هر یال به اندازه a, b, c جدا کنید و چنان که گفتیم، عمل کنید. من هم این شکل را ساختم و

در این شکل مکعبی به اضلاع « $a+b+c$ » رسم شده است.

اگر روی ۱۲ یال مکعب a, b, c را جدا کنیم و آن‌ها را به نقاط مقابل وصل کنیم، در ضمن اگر از نقاط برخورد خطوطی که به هم وصل می‌شوند، خطوطی موازی یال‌ها رسم کنیم، جمعاً ۲۷ مکعب و مکعب مستطیل خواهیم داشت.

از این ۲۷ مکعب و مکعب مستطیل:

۱. سه مکعب به حجم‌های a^3, b^3, c^3 داریم.

۲. سه مکعب مستطیل به حجم a^2b ،

سه مکعب مستطیل به حجم ab^2 ،

سه مکعب مستطیل به حجم a^2c ،

با حجم های زیر ملاحظه می شوند.

$$a^2b + ab^2 + abc$$

$$ab^2 + b^2c + b^2c$$

$$abc + b^2c + bc^2$$

ج) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت بالایی جسم، با حجم های زیر دیده می شوند.

$$a^2c + abc + ac^2$$

$$abc + b^2c + bc^2$$

$$a^2c + bc^2 + c^2$$

مجموع آن ها این است:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc = (a+b+c)^3$$

در نتیجه داریم:

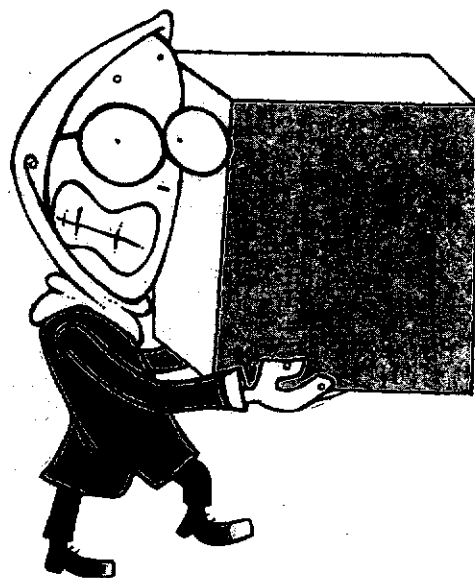
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

توجه: قطرهای مکعب هایی به حجم a^3, b^3, c^3 در امتداد قطر مکعب اصلی هستند.

اثبات جبری اتحاد مکعب مجموع سه جمله ای

فرض می کنیم $(a+b) = x$ باشد. داریم:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (x+c)^3 \\ &= x^3 + c^3 + 3x^2c + 3c^2x \\ &= (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) \\ &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 \\ &\quad + 3c(a^2 + b^2 + 2ab) + 3ac^2 + 3bc^2 \\ &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 + 3a^2c \\ &\quad + 3b^2c + 6abc + 3ac^2 + 3bc^2 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) \\ &\quad + 3bc(b+c) + 6abc \Rightarrow \\ (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) \\ &\quad + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc \end{aligned}$$



حجم ها را با دقت بسیار و صرف وقت زیاد در شکل ملاحظه کردن تا به نتیجه فوق رسیدم.

نتایج مرحله به مرحله شکل چنین است.

الف) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت پائینی جسم، با حجم های زیر ملاحظه می شوند.

$$a^3 + a^2b + a^2c$$

$$a^2b + ab^2 + abc$$

$$a^2c + abc + ac^2$$

ب) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت میانی جسم،