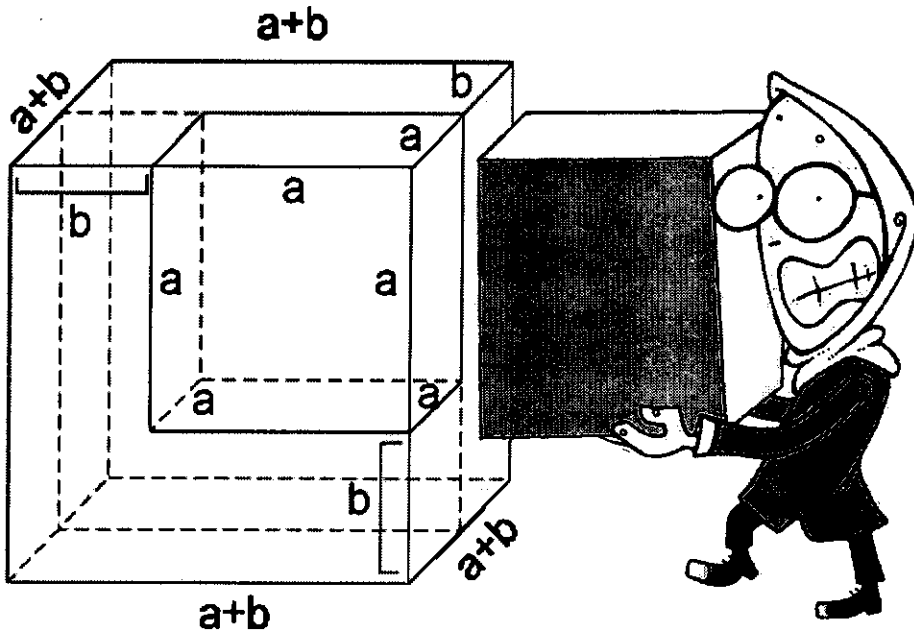




# اثبات اتحادها به کمک هندسه

برای دانش آموزان سال اول متوسطه

© احمد قندهاری



برای دانش آموزان دوره متوسطه

مثال ۱: تساوی  $4x - 12 = 0$  را در نظر می گیریم. اگر بنویسیم:  $4x = 12$ ، و دو طرف تساوی را بر ۴ تقسیم کنیم، آن گاه  $x = 4$  عدد ۴، تنها عددی است که اگر به جای  $x$  در تساوی  $4x - 12 = 0$  قرار گیرد، تساوی برقرار است.

مثال ۲: حال اگر تساوی  $(2x - 4)(x - 5) = 0$  را در نظر بگیریم، با توجه به این که وقتی حاصل ضرب دو پرانتز برابر صفر است، می گوئیم: یا پرانتز اول برابر صفر است یا پرانتز دوم، لذا می نویسیم:

مثال ۱: تساوی  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$  را در نظر می گیریم. اگر در این تساوی، به جای  $x$  عدد ۲ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

مثال ۱: تساوی  $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$  (الف)

مثال ۲: تساوی  $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$  (ب)

چنانچه به جای  $x$ ، عدد  $\frac{5}{4}$  را قرار دهیم، خواهیم داشت:

اعداد ۲ و ۳، تنها دو عددی هستند که اگر هریک از آنها را در تساوی  $(2x - 4)(x - 5) = 0$  قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد شد. تساوی  $4x - 12 = 0$  و تساوی

یا

= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

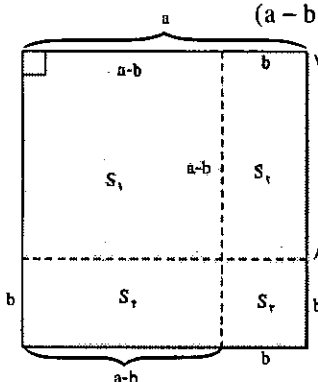
= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

$$a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab$$

۲. اثبات اتحاد دوم (مربع تفاضل دو جمله):

$$(a-b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab$$



مربعی به ضلع  $a$  را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.

$a^2$  = اندازه مساحت مربع اصلی

= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$$(a-b)^2 + b(a-b) + b^2 + b(a-b) \Rightarrow$$

$$(a-b)^2 + b(a-b) + b^2 + b(a-b) = a^2$$

$$(a-b)^2 + ab - b^2 + b^2 + ab - b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$$

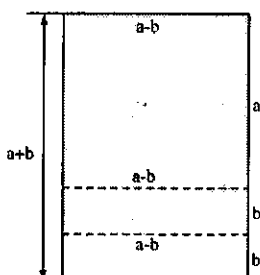
$$\Rightarrow (a-b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab$$

۳. اثبات اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$$

مستطیلی به اضلاع  $(a-b)$

و  $(a+b)$ ، مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



$$\frac{25}{4} - 9 = \left(\frac{5}{2} - 3\right)\left(\frac{5}{2} + 3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{25-36}{4} = \left(\frac{5-6}{2}\right)\left(\frac{5+6}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{11}{4} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

و اگر به جای  $x$ ،  $\sqrt{3}$  را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{3})^2 - 9 = (\sqrt{3} - 3)(\sqrt{3} + 3)$$

$$\Rightarrow 3 - 9 = 3 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 9$$

$$\Rightarrow -6 = -6$$

ملاحظه می‌کنیم، اگر در تساوی بالا به جای  $x$ ، هر عددی را قرار دهیم، دو طرف تساوی به دو عدد مساوی تبدیل می‌شود که در این صورت می‌گوییم، تساوی برقرار است.

تساوی  $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$  را اتحاد می‌گوییم و برای آن که تفاوتی با معادله داشته باشد، بهتر است بنویسیم:

$$x^2 - 9 \equiv (x-3)(x+3)$$

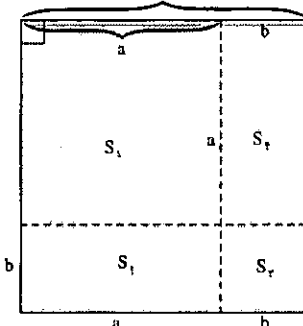
تعریف اتحاد

اگر دو طرف یک تساوی، به ازای همه مقادیر عددی که به جای حرف یا حروف آن قرار دهیم؛ به دو عدد مساوی تبدیل شوند. آن را «اتحاد» می‌گوییم در این مقاله قصد داریم، همه اتحادهای اصلی را به کمک هندسه ثابت کنیم.

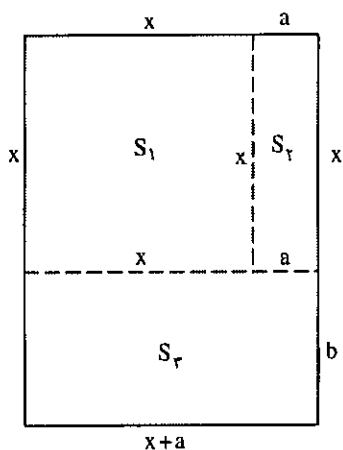
۱. اثبات اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله):

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab$$

مربعی به ضلع  $a+b$  مطابق شکل مقابل رسم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌هایی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت:



$(a+b)^2$  = اندازه مساحت مربع اصلی



اندازه مساحت مستطیل اصلی  $= (a-b)(a-b)$   
 مجموع اندازه های شکل های داخل مستطیل اصلی  
 $= (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$

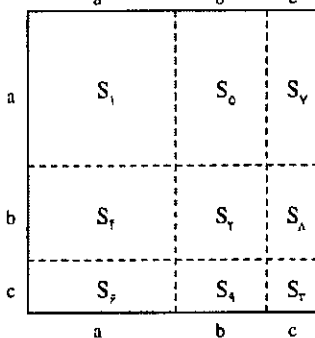
$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab + ab - b^2 + ab - b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)}$$

۴. اثبات اتحاد چهارم (مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$



مربعی به ضلع  $(a+b+c)$  مطابق شکل  
 رسم می کنیم. با  
 توجه به اندازه هایی  
 که در شکل نشان داده  
 شده است، می توان  
 نوشت:

اندازه مساحت مربع اصلی  $= (a+b+c)^2$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + ac + ac + bc + bc$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)}$$

۵. اثبات اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

مستطیلی به اضلاع  $(x+a)$  و  $(x+b)$  مطابق شکل رسم  
 می کنیم. به اندازه هایی که در شکل نوشته شده است، توجه

فرمایید.

اندازه مساحت مستطیل اصلی  $= (x+a)(x+b)$

$$= S_1 + S_2 + S_3$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مستطیل اصلی

$$= x^2 + ax + b(x+a)$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مستطیل اصلی

$$= x^2 + ax + bx + ab$$

مجموع اندازه های شکل های داخل مستطیل اصلی

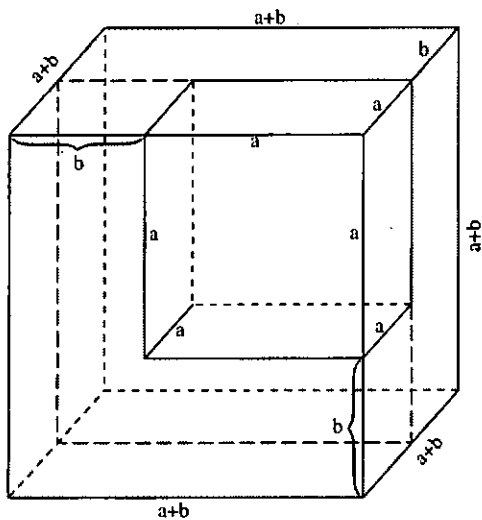
$$= x^2 + (a+b)x + ab \Rightarrow$$

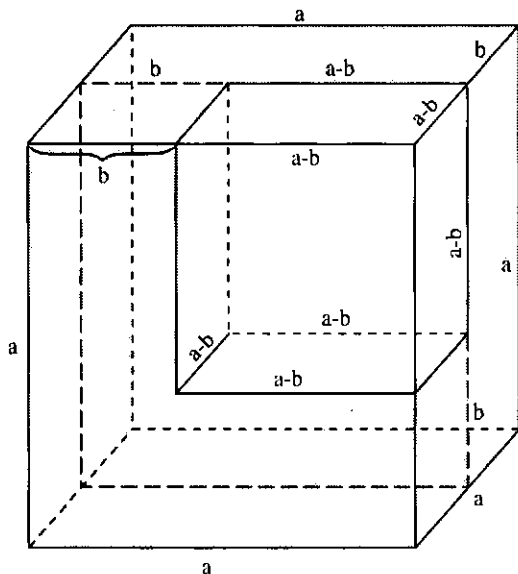
مجموع اندازه های شکل های داخل مستطیل اصلی

$$\boxed{(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab}$$

۶. اثبات اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$





مکعبی به طول یال  $(a+b)$  مطابق شکل در نظر می‌گیریم. تصور فضایی این نتایج قدری مشکل است، مگر آن‌که جسم را بسازیم. به هر حال، در داخل جسم حاصل یک مکعب به طول یال  $a$ ، یک مکعب به طول یال  $b$  و سه مکعب مستطیل به طول یال‌های  $(a+b)$ ،  $a$  و  $b$  وجود دارد. با توجه به این‌که اگر طول یال مکعبی  $x$  باشد، حجم آن  $x^3$  است و اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی  $x$ ،  $y$  و  $z$  باشد، حجم آن  $x.y.z$  است، پس می‌توان نوشت:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3$$

$(a-b)$ ، یک مکعب به طول یال  $b$  و سه مکعب مستطیل به طول یال‌های  $(a-b)$  و  $a$  و  $b$  به وجود می‌آید.

با توجه به توضیح مورد ۶، می‌توان نوشت:

$a^3 =$  اندازه حجم مکعب اصلی  
 $(a-b)^3 + b^3 + 3ab(a-b) =$  مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب مستطیل‌های داخلی  
 $(a-b)^3 + b^3 + 3a^2b - 3ab^2 =$  مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب مستطیل‌های داخلی

$$\Rightarrow a^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3a^2b - 3ab^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

۷. اثبات اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

مکعبی به طول یال  $a$  می‌سازیم. سپس در گوشه مکعب، مکعبی به طول یال  $(a-b)$  می‌سازیم. مطابق شکل، همان طوری که قبلاً گفته شد، تصور فضایی آن فوق‌العاده مشکل است. بنده خودم مکعب‌ها را با این شرایط ساختم و به نتایج زیر دست یافتم.

در داخل مکعب اصلی، یک مکعب به طول یال

برای سال دوم رشته ریاضی

اگر  $x - \frac{1}{x} = 2$  و  $k = x^8 - 408x$ ، مقدار  $k$  را بیابید.

برای سال سوم ریاضی

اگر  $f(x + \frac{1}{x}) = x^{12} + \frac{1}{x^{12}}$ ، آن‌گاه  $f(\sqrt{3})$  را بیابید.

برای پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی

ثابت کنید:

$$[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$$

احمد قندهاری

از بین پاسخ‌های درست، به سه نفر برای حل یک مسأله جایزه داده می‌شود.

مسائل مسابقه‌ای