

اشاره

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله بحث شد، اینک در پی به حل معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر خواهیم پرداخت.

انتهای و معادله (۱۵)

معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر (بحث تاریخی)

پرویز شهبازی

نخستین کسی که معادله‌ی درجه‌ی سوم را به طریق جبری حل کرد، جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی بود. او در سده‌ی پانزدهم می‌زیست (مرگ او در سال ۱۴۳۶ میلادی اتفاق افتاد که به روایتی با توطئه‌ی الغ بیگ کشته شد). و برای ساختن رصدخانه‌ی سمرقند از کاشان به سمرقند رفته بود. جمشید کاشانی ریاضی‌دان و محاسب برجسته‌ای بود که توانست عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه کند و برای بار اول، عددها را به صورت ده‌دهی، همان‌طور که ما امروز می‌نویسیم، کشف کرد.

کاشانی، برای کارهای اخترشناسی به محاسبه‌ی سینوس یک درجه نیاز داشت. پیش از او، ریاضی‌دانان دیگر ایرانی، مثل ابوریحان بیرونی، ابوالوفای بوزجانی^۱ و دیگران، آن را به تقریب به کار می‌بردند. برای نمونه، ابوالوفای بوزجانی از یک نابرابری برای

محاسبه‌ی تقریبی سینوس یک درجه استفاده می‌کرد.^۲ ولی جمشید کاشانی توانست با حل جبری یک معادله‌ی درجه سوم، مقدار آن را تا هر دقت دلخواه، به دست آورد. تابع‌های مثلثاتی ۱۵ درجه و ۱۸ درجه را تا آن زمان پیدا کرده بودند و جمشید کاشانی باید به یاری سینوس ۳ درجه (یعنی اختلاف ۱۸ درجه و ۱۵ درجه) سینوس یک درجه را محاسبه می‌کرد. سینوس ۳ درجه بر حسب سینوس یک درجه چنین است:

$$\sin 3^\circ = 4\sin^2 1^\circ - 3\sin 1^\circ$$

اگر در این برابری فرض کنیم $\sin 1^\circ = x$ و $\sin 3^\circ = a$ ، باید این معادله را نسبت به x حل کنیم:

$$4x^2 - 3x - a = 0 \quad (۱)$$

و جمشید کاشانی این معادله را حل کرد (با هر تقریب دلخواه).

می دانسیم معادله ی کامل درجه سوم، یعنی:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ را با مجهول کمکی } x = y - \frac{b}{3a}$$

می توان به معادله ای تبدیل کرد که ضریب x^2 در آن برابر صفر باشد. یعنی بااین مجهول کمکی، معادله را به معادله ای تبدیل کرد که شامل x^3 ، x و مقدار ثابت باشد. یعنی معادله به صورت «۱». به این ترتیب، جمشید کاشانی راه حل جبری معادله ی درجه سوم را پیدا کرد. البته قبل از کاشانی، خیام نیشابوری راه حل هایی، بعضی جبری و بعضی هندسی، برای حل انواع معادله ی درجه سوم داده بود (به یاری مقطع های مخروطی در کتاب جبر و مقابله ی خود). بعد از جمشید کاشانی، «پائولوولمس» ریاضی دان اسپانیایی، راه حلی برای معادله ی درجه چهارم پیدا کرده بود، از این راه حل، اطلاعی در دست نیست. ولی او بنا به دادگاه تفتیش عقاید و به دستور توماس دما-تو وگلکه مادا (۱۴۲۰ تا ۱۴۹۸ میلادی)، رئیس مرکز تفتیش عقاید اسپانیا به دلیل همین کشف ریاضی خود، به مرگ با آتش محکوم شد.

بعد نوبت به ریاضی دان های ایتالیایی می رسد. ژه زولامو کاردانو (۱۵۰۱ تا ۱۵۷۶ میلادی) برای محاسبه ریشه های معادله ی درجه سوم رابطه ای به دست آورد (برای معادله ی $x^3 + px + q = 0$). کاردانو در نوشته های فارسی به کاردان مشهور است:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{4}}$$

این رابطه، برای نخستین بار در کتاب کاردانو به نام «هنر بزرگ یا قانون های جبری» آمده است و به همین دلیل، «رابطه ی کاردان» نام گرفته است. دلیل هایی وجود دارند که این رابطه به یک ریاضی دان دیگر ایتالیایی به نام تارتاگلیا (۱۴۹۹ تا ۱۵۵۷ میلادی) است. تارتاگلیا در کودکی پدر خود را از دست داد. او به دست سربازان فرانسوی که شهرش را اشغال کرده بودند، کشته شد. همان جا سربازان فرانسوی، زبان تارتاگلیا را بریدند و فکش را شکستند. این وضع تا آخر زندگی همراه نیکولو بود و به همین دلیل، او را «تارتاگلیا» می نامیدند که به زبان ایتالیایی به کسی گفته می شود که لکنت زبان دارد. مادر نیکولو قدرت پرداخت شهریه ی او را در مدرسه نداشت و «نیکولو» زبان و ریاضیات را پیش خود آموخت. نیکولو جوانی با استعداد بود و چنان پیش رفت که در سال ۱۵۳۵ میلادی، کرسی ریاضیات را در شهر «وِرونا» ایتالیا به او سپردند. کاردانو آدم با استعدادی بود. او پزشکی و فلسفه را به خوبی می دانست. در حل تمرین های ریاضی هم کار می کرد. کاردانو، در ضمن، به اخترشناسی (علمی دروغین) هم اعتقاد داشت. او حتی زایچه ی خود را تشکیل داد. او در این زایچه، روز و ساعت مرگ خود را پیش بینی کرده بود، ولی چون در روز موعود چیزی

پیش نیامد، برای این که درستی پیش گویی خود را ثابت کند، در ساعت موعود خودکشی کرد.

ظاهر امر این است که کاردان از راه حل معادله ی درجه سومی که تارتاگلیا کشف کرده بود، به نحوی آگاه می شود و بدون این که نام مؤلف اصلی آن را ببرد، در کتاب خود نشر می دهد. تارتاگلیا، خود مشغول نوشتن کتابی بزرگ در زمینه ی جبر بود که حل معادله ی درجه ی سوم، جای نمایانی در آن داشت، ولی چون کاردان کتاب خود را زودتر منتشر کرده بود، وسیله ای برای نزاع آن ها شد که برای همه ی عمر باقی ماند.

از ریاضی دانان ایرانی که روی معادله های سیال کار کرده است، ابوبکر محمد فرزند حسین معروف به کرجی^۲ است. کرجی بخشی از کتاب «الفخری» خود را به معادله های سیال اختصاص داده است که بالاتر از درجه های دوم و سوم هستند؛ مثل:

$$x^4 - y^4 = z^2 \text{ یا } x^2 + y^4 = z^2$$

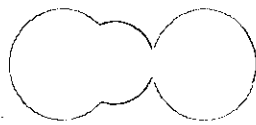
یا معادله های $x^2 - y^2 = z^3$ یا $x^2 + y^2 = z^2$ و می توان احساس کرد که کرجی به دنبال راهی بوده است تا ناممکن بودن مسئله ی بزرگ فرما را ثابت کند. البته کرجی هیچ جانی نامی از این قضیه که ۸۰۰ سال بعد فرما مطرح کرده است، نمی برد. بسیاری از معادله هایی را که آورده، با جواب ذکر کرده است. بین جواب ها، عددهای کسری (ولی گویا) به فراوانی دیده می شوند. به عنوان

نمونه، برای معادله ی $x^4 - y^4 = z^2$ جواب های $x = \frac{18}{5}$ ، $y = \frac{9}{5}$ و $z = \frac{27}{5}$ را معین می کند.

به هر حال به نظر من به دنبال ناممکن بودن معادله ی $x^n + y^n = z^n$ برای x, y, z و n درست بوده است. از قضیه ای که بعدها نام قضیه ی بزرگ فرما را به خود گرفته و همین چند سال پیش به صورت پیچیده ای ثابت شده است، نامی نمی برد.



پس از کاردان و تارتاگلیا، لو و دیکوفه راری (۱۵۲۲ تا ۱۵۶۵ میلادی) ریاضی دان دیگر ایتالیایی، به کشف راه حل معادله ی درجه چهارم موفق شد. این که ایرانی ها به معادله ی بالاتر از درجه سوم نمی پرداختند، یکی به خاطر این بود که دوره ی ریاضیات ایرانی، دوره ی کاربردی بود و در آن دوره تنها به معادله هایی توجه داشتند که در زندگی، عمل و دانش های دیگر کاربرد داشته باشد. دوم به این دلیل بود که آن ها به پیروی از ریاضی دانان یونانی، غالباً تلاش می کردند تعبیری هندسی برای عمل های خود پیدا کنند. آن ها مجهول را به صورت پاره خطی در نظر می گرفتند. اگر مجهول را با x نشان دهیم، x^2 را به معنای مساحت مربعی به ضلع x و x^3 را به صورت مکعبی به ضلع x در نظر می گرفتند و چون فضای ماسه بعدی است، برای x^4 ، x^5 و رتبه های بالاتر، مفهومی قائل نبودند. این



مشکل بعدها به وسیله ی رنه دکارت (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰ میلادی) حل شد که ثابت کرد جمله x^2 را هم می توان به یاری پاره خط راست نشان داد.



در ایران، مکان های «وراقی» (یعنی کتاب فروشی) مرکز تجمع اهل دانش و ادب بود. وراق ها تنها به فروش کتاب بسنده نمی کردند، خود اهل دانش و فرهنگ بودند، با دانشمندان و ادیبان صحبت می کردند، به رونویس کردن کتاب ها می پرداختند و حتی خودشان آن ها را صحافی می کردند. ولی در ایتالیا، در دوره ی رنسانس، کارگاه های نقاشی، مجسمه سازی و صنعتی محلی، اجتماع بزرگان فرهنگ بود. هر روز در این کارگاه ها جمع می شدند و اگر کسی مسئله یا خبری داشت، به دیگران می گفت. تارتاگلیا، کاردانو، فهراری و بسیاری دیگر از راه همین اجتماع کارگاهی، کار خود را آغاز کردند و موفقیت های خود را عرضه داشتند. رنسانس به دیگر کشورها، دیرتر از ایتالیا رسید. فرانسه، انگلیس و کشورهای شمالی اروپا، باید اندکی صبر می کردند تا پرتوهای رنسانس را دریافت کنند. از این گذشته، محفل هایی از دانشمندان و فرهنگیان، به آن صورت که در ایران و ایتالیا بود، در آن جاها کمتر پیدا می شد. تا سده ی نوزدهم طول کشید تا دنبال کار معادله ها گرفته شد.

یکی از بزرگترین ریاضی دانان اروپای غربی، نیلس هنریک آبل (۱۸۰۲ تا ۱۸۲۹ میلادی) ریاضی دان نروژی بود. آبل از خانواده ی تهی دستی بود. او از کودکی استعداد خود را نمایان ساخت، ولی تهی دستی خانواده، او را از امکان تحصیل منظم بازداشت. او پیشرفت خود را در دانش، مدیون آموزش پیش خود و برخی از دوستان نزدیکش بود. با زحمت بسیار توانست در دانشگاه پایتخت نام نویسی کند، ولی دانشگاه نمی توانست در جهت استعداد او کمک کند. زیرا او به دانش ریاضی علاقه داشت، ولی دانشگاه در آن زمان رشته ریاضی نداشت.

در سال ۱۸۲۳ کوشید معادله ی درجه پنجم را به یاری رادیکال ها حل کند. آبل در آغاز گمان کرد معادله را حل کرده است، ولی وقتی به اشتباه خود پی برد، دنبال مطلب را رها نکرد و سرانجام ثابت کرد، معادله درجه پنجم، راه حل جبری به صورت رادیکالی در حالت کلی خود ندارد، مگر در حالت های خاص.

این موفقیت جالب، هم چنین تألیف او درباره ی انتگرال گیری عبارت های جبری، شرایطی را فراهم کرد که او بتواند به خارج برود و هدف خود را دنبال کند. او نوشته خود را برای گاوس فرستاد. ولی گاوس به گمان این که کار یک جوان بی تجربه است، اعتنایی به آن نکرد.

آبل ابتدا «برلن ماند و با اندیشه ی پاسخ مساعد گاوس نسبت به استعداد خارق العاده ی خود، انتظار کشید. در اینجا با روزنامه ی «کرل» در زمینه ریاضیات نظری و کاربردی آشنا شد که خیلی مورد

علاقه ی جوانان بود و به وسیله ی اوگوست لئوپولد کرل (۱۷۸۰ تا ۱۸۵۵ میلادی) منتشر می شد.^۵

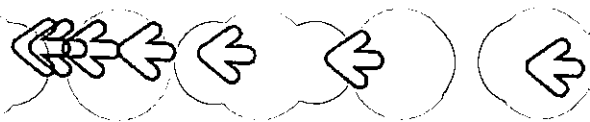
در برلن، آبل بررسی خود را درباره ی هم گرایی رشته های توانی و قضیه های مهمی که به شعاع هم گرایی رشته های توانی در حوزه ی عدد های حقیقی و مختلط مربوط می شدند، کامل کرد.

در سال ۱۹۲۶، آبل به پاریس رفت و در آن جا رساله ی خود را زیر عنوان «یادداشتی درباره ی یک گروه گسترده ی تابع های غیر جبری» به فرهنگستان علوم فرستاد. ولی این کار با ارزش هم مورد توجه لازم قرار نگرفت. این کار مدت ها نزد «کوشی» بین کاغذهای او باقی ماند و تنها بعد از مرگ آبل در سال ۱۸۴۱ چاپ شد. در این اثر، آبل انتگرال از نوع $R(x,y)dx$ را مورد بررسی قرار داده بود که در آن، $R(x,y)$ تابع دلخواه و گویایی از x و y تابعی جبری از x است. در ضمن، دو حالت جداگانه را تشخیص داده بود: اگر y به صورت ریشه ای از چند جمله ای درجه سوم و درجه چهارم بیان شود، آن وقت انتگرال به انتگرال بیضوی منجر می شود. و اگر y ریشه ای از چند جمله ای با توان بالای درجه چهارم باشد، آن وقت انتگرال به صورت هذلولوی درمی آید. امروزه، انتگرال به صورت $\int R(x,y)dx$ را انتگرال آبلی می نامند.

زندگی بعدی آبل، بسیار اندوه بار است: این بی حرمتی که در حق این ستاره ی دانش و کشف خلاق او شده بود و تنها پس از مرگش به رسمیت شناخته شد و در ضمن بی پولی و بینوایی دائمی، آبل را واداشت تا در سال ۱۹۲۷ به زادگاه خود برگردد. ولی بازگشت او هم با شادی همراه نبود. در آغاز توانست کار ثابتی پیدا کند و تنها درس می داد، یعنی بخشی از درس خود را حفظ کرده بود. راست است که در سال ۱۸۲۸، توانست کار تدریس در دانشگاه بگیرد، ولی سرانجام فقر و اندوه دائمی او را از پا درآورد و سل در او پیشرفت کرد و در ششم آوریل ۱۸۲۹، یعنی وقتی که تنها ۲۶ سال داشت، از دنیا رفت.

چنین بود زندگی جوان نابغه، ولی با مرگ آبل، اندیشه ی بلند او در ریاضیات نمرد و ارزش خود را تا زمان حال حفظ کرده است. به ویژه یکی از اندیشه های عمیق آبل، مورد استفاده ی پژوهشگران ریاضیات است. این اندیشه را خود آبل چنین، شرح می دهد: «به جای این که درباره ی رابطه ای بیندیشیم که وجود آن نامعلوم است، باید به این پرسش پاسخ دهیم: آیا چنین رابطه ای در واقع وجود دارد». خود آبل با در نظر گرفتن این اندیشه، ثابت کرد که معادله ی درجه چهارم را نمی توان به یاری رادیکال ها حل کرد. هم چنین برخی از تابع ها را پیدا کرد که نمی توان باروش های مقدماتی انتگرال آن ها را به دست آورد. بعد از مرگ آبل «مجله ی رکول» درباره ی او نوشت: «او برای خودش کار نمی کرد. کار او به خاطر دانش بود که عشق آتشین به آن داشت.»

اکنون درباره ی زندگی اندوه بار یکی دیگر از ریاضی دانان بزرگ



سده‌ی نوزدهم صحبت می‌کنیم. اواريست گالوا (۱۸۱۱ تا ۱۸۳۲ میلادی) در «بورلا-رن» نزدیک پاریس متولد شد. هنوز درس می‌خواند که نخستین کارهای علمی خود را چاپ کرد. در سال ۱۸۲۹ در امتحان پلی تکنیک پاریس شرکت کرد. گالوا، هم به دلیل کار علمی پلی تکنیک و هم به علت انقلابی بودن دانشجویان آن‌جا علاقه داشت به آن‌جا وارد شود. گالوا در امتحان پذیرفته نشد و علاقه‌ی عمیق او به ریاضیات موجب شد بین او و معلمی که امتحان می‌کرد، برخوردی پیش آید.^۶

گالوا به ناچار در «اکول نرمال» ثبت نام کرد که دنبال کار دبیرستان بود. ولی از آن‌جا هم، بعد از یک سال، اخراج شد. دلیل اخراج، علاقه‌ی پر حرارت گالوا به زندگی سیاسی فرانسه بود.

نهم ماه مه سال ۱۸۳۱، گالوا در ضیافتی که روز جمهوری برپا شده بود، با خنجر جری در دست، بلند شد و در حالی که خنجر را نشان می‌داد گفت: «به نام لوئی فیلیپ!» پیام آشکار بود: گالوا، لوئی فیلیپ را تهدید کرده بود.

پس از این حادثه، گالوا دستگیر و به زندان «سنت پلاگی» فرستاده شد. در دادگاه که گالوا را خیلی جدی به خاطر عواقب عمل او تهدید کرده بودند، سرانجام به دلیل جوان بودنش، حکم به تبرئه‌ی او دادند. در آن موقع گالوا ۱۹ ساله بود. چهاردهم ژوئیه‌ی ۱۸۳۱، گالوا به خاطر شرکت فعال در تظاهرات مردم در روز انقلاب سال ۱۷۸۹، دوباره به زندان افتاد. بعد از آزادی از زندان، گالوا ۲۱ ساله در یک دوئل کشته شد. شواهدی در دست است که پلیس این دوئل را ترتیب داده بود.

گالوا در زندگی کوتاه خود، توانست اندیشه‌ی تازه‌ای را در ریاضیات وارد کند؛ اندیشه‌ای که به پیشرفت جبر و به طور کلی ریاضیات، کمک کرد و جهت آن را تغییر داد.

گالوا در زندگی کوتاه خود، روی هم ۵ مقاله‌ی کوتاه منتشر کرد که نزدیک به ۳۵ صفحه می‌شدند. عنوان‌های این مقاله‌ها چنین است: «اثبات یک قضیه از کسرهای مسلسل»، «مقاله‌ای درباره‌ی برخی جنبه‌های آنالیز»، «تجزیه و تحلیل یک یادداشت درباره‌ی حل معادله‌ها»، «مقاله‌ای درباره‌ی حل عددی معادله‌ها» و «از نظریه‌ی عددها». اواريست گالوا، کارهای بسیار اساسی خود را دو بار برای فرهنگستان علوم پاریس و دیگران فرستاد. این نامه‌ها برای ریاضی دان مشهور اوگست کوشی (۱۷۸۹ تا ۱۸۵۷ میلادی) و ژان باتیست ژوزف فوریه (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰ میلادی) ریاضی دان بزرگ فرانسوی، برای بررسی فرستاده شد، ولی آن‌ها ارزشی برای این نامه‌ها قائل نشدند و حتی آن‌ها را گم کردند. شب قبل از دوئل، گالوا برای دوستش «شه‌والیه» نامه‌ای نوشت که در آن گفته شده است: «او چند کشف دارد که یکی از آن‌ها به 'حل معادله‌ها و دیگری به انتگرال تابع‌ها مربوط است. «در ضمن به شه‌والیه نوشته بود،

آن‌ها را برای گاوس و ژاکوبی فرستاده است، زیرا از درستی آن‌ها و این که برای دانش بسیار اهمیت دارد، مطمئن است، ولی از جانب آن‌ها جوابی به او داده نشد.

تنها ۱۴ سال بعد از مرگ گالوا بود که ژوزف لیوول (۱۸۰۹ تا ۱۸۸۲ میلادی) کار او را با دقت بررسی کرد و متوجه کشفی بزرگ شد. آن وقت بود که این اثر چاپ شد.

بررسی اساسی و عمیق گالوا به مسئله‌ی جبر مربوط است. او به تنظیم قضیه‌ی مربوط به عددهای گنگی پرداخت که معادله‌های جبری را تشکیل می‌دهند. این نظریه را در ریاضیات «نظریه‌ی گالوا» می‌نامند. نظریه گالوا، بررسی‌های گسترده‌ای درباره‌ی حل معادله‌های از درجه‌ی بالا کرده است. معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم را در سده‌ی شانزدهم و به وسیله‌ی ریاضی دانان ایتالیایی، به وسیله رادیکال‌ها داده شده بود و آبل در سده نوزدهم، غیر قابل حل بودن معادله‌های بالاتر از درجه چهارم را به کمک رادیکال‌ها ثابت کرد. نظریه‌ی معادله‌های دو جمله‌ای هم به وسیله گاوس گسترش یافته بود.

گالوا در «یادداشتی درباره‌ی شرط‌هایی در قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها»، شرط‌های قابل حل بودن معادله‌ها به کمک رادیکال‌ها را، از هر درجه‌ای که باشند، مطرح کرده است. او در نظریه خود، مفهوم‌های زیادی را وارد ریاضیات کرده است که امکان بررسی‌های جدی را در چند جمله‌ای‌های جبری می‌دهد. از جمله این مفهوم‌ها، می‌توان از گروه، زیر گروه، میدان و غیره نام برد. نتیجه‌گیری‌های گالوا، کاربرد خود را در بسیاری از شاخه‌های گوناگون ریاضیات پیدا کرده است.

زیرنویس

۱. بوزجان در مرز افغانستان است. هنوز باقی مانده‌ی آثار این شهر در نزدیک تربت جام باقی است.

۲. این نابرابری را در کتاب «نابرابری‌ها» آورده‌ام.

3. Verona

۴. وپکه (woepcke) در سال ۱۸۵۳ نسخه‌ای از کتاب «فخری» تألیف کرجی را به دست آورد که در آن اشتباه نام کرجی به کرخی تبدیل شده بود. کرخه محله‌ای در نزدیکی بغداد است و در نتیجه وپکه کرجی را عرب و عراقی می‌دانست. ولی از کتاب «آب‌های زیرزمینی» (تألیف کرجی) به طور کامل مشهود است که ایرانی بوده و اهل کرج نزدیک تهران است.

۵. crelle ریاضی دان و مهندس آلمانی. از ۱۸۲۷ عضو فرهنگستان برلین شد و از سال ۱۸۲۶ مجله‌ی خود را منتشر کرد.

۶. گالوا دوباره در امتحان پلی تکنیک شرکت کرد، ولی هر دو بار رد شد. در یکی از امتحان‌ها، از پاسخ دادن به پرسش مربوط به لگاریتم، به دلیل ساده بودن آن، امتناع کرد.