

اتحاد به دست می آید. برای $f(x) = 0$ هم این چهار جواب را خواهیم داشت:

$$x_1 = a, x_2 = -(a+b), x_{3,4} = \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

□

در این جا راهی برای تجزیه ی این عبارت جست و جو

می کنیم:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

ضریب های عبارت $f(x)$ را درست (مثبت، منفی یا صفر)

می گیریم. ضریب بزرگ ترین درجه را هم مثبت فرض می کنیم:

$$a_n > 0$$

n را درست و مثبت می گیریم، یعنی $f(x)$ برابر مقدار ثابت a_0 نیست.

چند جمله ای $g(x)$ را با توان مثبت کوچک تر از n ، و ضریب های مثبت را «بخشیابی» از چند جمله ای $f(x)$ گوئیم؛ به شرطی که بتوان چند جمله ای $h(x)$ را (که متمم بخشیاب می نامیم) به نحوی پیدا کرد که داشته باشیم:

$$f(x) = g(x).h(x)$$

وقتی که $f(x)$ بخشیابی نداشته باشد، آن را «غیر قابل

تجزیه ی یک عبارت جبری به صورت ضرب عامل های خود، هم وسیله ای برای تشکیل اتحاد است و هم به حل معادله های یاری می رساند. برای نمونه، به این مسأله توجه کنید:

مسأله: $f(x)$ به این صورت داده شده است:

$$f(x) = a(b+x)(b^2+x^2-a^2)(a+b-x)$$

$$-x(a+b)(a^2+b^2-x^2)(b+x-a)$$

$f(x)$ را به صورت ضرب چهار عامل تجزیه کنید و سپس معادله ی $f(x) = 0$ را حل کنید.

حل: عبارت $f(x)$ به ازای $b=0$ و $x=a$ برابر صفر می شود، بنابراین بر $b(x-a)$ بخش پذیر است. پراوتزها را باز و $f(x)$ را نسبت به x منظم می کنیم. اگر آن را بر $b(x-a)$ تقسیم کنیم، در خارج قسمت به این عبارت می رسیم:

$$x^2 + (a+b)x^2 + (a^2-b^2)x + (a^2-b^2)(a+b)$$

$$= x^2(x+a+b) + (a^2-b^2)(x+a+b)$$

$$= (x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

بنابراین مقدار $f(x)$ به این صورت است:

$$f(x) = b(x-a)(x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

اگر $f(x)$ را همان عبارت نخستین در نظر بگیریم، یک

اتحاد و معادله

تجزیه ی عبارت های جبری

(روشی تازه)

پرویز شهریاری

چند جمله ای $p=gh$ با این دستور بیان می شود:

$$a_{i,j} = b_i c_j + \dots$$

(چند نقطه ای که در این جا گذاشته ایم، به معنای برخی جمله های غیر منفی متمم است) پس:

$$a_{i,j} \geq b_i c_j$$

بنابراین، بزرگ ترین ضریب چند جمله ای f هم کم تر از حاصل ضرب $b_i c_j$ نیست و در نتیجه کم تر از هر یک از ضریب های b_i و c_i نیست (زیرا عددهای b_i و c_i ، عددهایی درست و مثبت هستند).

از این به بعد، بزرگ ترین ضریب چند جمله ای مثبت را، ارتفاع آن می نامیم. اکنون m را عدد درست مثبتی در نظر می گیریم. هر چند جمله ای f را که ارتفاعی کم تر از m داشته باشد، به عدد درست و مثبت $[f]$ نسبت می دهیم و فرض می کنیم:

$$[f] = f(m)$$

بنابراین، اگر داشته باشیم:

$$f(m) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

آن وقت خواهیم داشت:

$$[f] = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0$$

بنابراین، چون بنابر شرط، ارتفاع چند جمله ای f کم تر از m است، عددهای $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ رقم های $[f]$ را در عددشماری با مبنای m تشکیل می دهند. به این ترتیب:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_m$$

را برای هر چند جمله ای مثبت (۱) که ارتفاعی کم تر از m داشته باشد، داریم:

$$[f] = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_m$$

به زبان دیگر، برای آن که عدد $[f]$ را در دستگاه عددشماری به مبنای m به دست آوریم، کافی است ردیف ضریب های چند جمله ای f را بنویسیم. روشن است که رابطه ی:

$$f \rightarrow [f]$$

ارتباطی یک به یک بین مجموعه ی چند جمله ای های مثبتی که ارتفاعی کم تر از m دارند (و شامل چند جمله ای با توان صفر هم می شوند)، و مجموعه ی همه ی عددهای مثبت درست دارند. چند جمله ای f را که متناظر با عدد a باشد، یعنی برای آن $[f] = a$ ، چند جمله ای می نامیم که به عدد a ارتباط دارد

تحویل می نامیم. ثابت می شود، هر چند جمله ای، حاصل ضربی از چند جمله ای های غیر قابل تحویل است (در این جا از تبدیل به عامل های درجه اول صحبتی نمی کنیم).

در این جا روش ساده و بسیار زیبای تجزیه ی چند جمله ای ها به عامل های خود، از همان راهی است که م. و. یا کوکین در کتاب «نظریه ی عددی تبدیل چند جمله ای ها» طرح کرده است. روشن است که برای تجزیه ی یک عبارت، اول باید قابل تحویل بودن آن را ثبت کرد و در صورت مثبت بودن جواب، یکی از عامل های آن را معین کرد. ما در این جا به همین مسأله می پردازیم.

چند جمله ای های مثبت

چند جمله ای (۱) را مثبت می نامیم، به شرطی که همه ی ضریب های آن نامنفی باشند:

$$a_n > 0, a_{n-1} \geq 0, \dots, a_1 \geq 0, a_0 \geq 0$$

روشن است، حاصل ضرب دو (یا به طور کلی چند) چند جمله ای مثبت، یک چند جمله ای مثبت است. در حالت کلی، عکس این مطلب درست نیست. یعنی چند جمله ای های مثبتی وجود دارند که بخشایب های نامثبت دارند؛ برای نمونه:

$$A = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \\ = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$$

به عنوان نخستین تقریب برای رسیدن به مسأله ی کلی تجزیه ی یک چند جمله ای دلخواه به صورت عامل های یا کوکین، این مسأله ی کمکی را می آوریم:

مسأله ی یا کوکین: برای هر چند جمله ای مثبت (با توان های مثبت و ضریب های درست)، دست کم یک زوج متمم یکدیگر با بخش های مثبت وجود دارد (و یا ثابت می کنیم که برای چند جمله ای مفروض، چنین زوجی پیدا نمی شود). یا کوکین این مسأله را بر پایه ی پیش قضیه ای ثابت می کند، به این شرح:

پیش قضیه ی ۱. بزرگ ترین ضریب حاصل ضرب gh دو چند جمله ای مثبت g و h ، کم تر از بزرگ ترین ضریب هر یک از عامل ها نیست.

اثبات: b_i و c_i را بزرگ ترین ضریب های چند جمله ای های g و h می گیریم. از آن جا که ضریب

$$g = b_p x^p + \dots + b_1$$

$$h = c_q x^q + \dots + c_1$$

دو بخش‌یاب متمم چند جمله‌ای (۱) باشند. در این

صورت:

$$n = p + q \quad (4')$$

$$a_n = b_p c_q \quad (5')$$

$$a_i = b_i c_i \quad (6')$$

به جز آن:

$$f(i) = g(i)h(i) \quad (7')$$

برای هر عدد درست مثبت a که در دستگاه عدد شماری به مبنای m نوشته شده است، نماد $\tau(a)$ را به معنای یک واحد کم‌تر از عدد رقم‌های آن و $\sigma(a)$ را مجموع رقم‌های آن می‌گیریم. به جز این، نمادهای $A(a)$ و $B(a)$ را نخستین رقم عدد a (رقم یکان) و رقم سمت چپ آن (واحد رقم ردیف بالاتر) می‌گیریم. با این نامگذاری می‌توانیم، رابطه‌های (۴') تا (۷') را به این صورت بنویسیم:

$$\tau([f]) = \tau([g]) + \tau([h]) \quad (4'')$$

$$B([f]) = B([g])B([h]) \quad (5'')$$

$$A([f]) = A([g])A([h]) \quad (6'')$$

$$\sigma([f]) = \sigma([g])\sigma([h]) \quad (7'')$$

که از آن‌جا، خیلی زود به قانون زیر می‌رسیم:

قانون انتخاب: برای تشکیل زوج (g, h) ، بخش‌یاب‌ها متمم یکدیگر از چند جمله‌ای f ، باید تنها از آن زوج‌های (a, b) که بخش‌یاب‌های متمم عدد $[f]$ هستند و برای آن‌ها این رابطه‌ها برقرار است، استفاده کرد:

$$\tau([f]) = \tau(a) + \tau(b), \quad (4)$$

$$B([f]) = B(a)B(b), \quad (5)$$

$$A([f]) = A(a)A(b), \quad (6)$$

$$\sigma([f]) = \sigma(a)\sigma(b) \quad (7)$$

برقراری رابطه‌های (۴) و (۵) و (۶) را می‌توان «پانخستین نگاه»، از برابری $[f] = ab$ نتیجه گرفت. تحقیق رابطه‌ی (۷) کمی دشوارتر است، ولی حتی این رابطه را هم می‌توان «در ذهن» نتیجه گرفت.

رابطه‌های (۴'') تا (۷'')، نه تنها برای درستی برابری (۲)

(در مبنای m). برای به دست آوردن این عدد، باید عدد a را در عدد شماری به مبنای m نوشت و رقم‌های این عدد را ضریب‌های چند جمله‌ای f انتخاب کرد. یادآوری می‌کنیم، چند جمله‌ای با توان صفر (که ما آن را در بررسی خود وارد نمی‌کنیم)، با عددهای کوچک‌تر از m و تنها با همان عددها، متناظر است.

از پیش قضیه‌ی ۱ و برابری:

$$f(m) = g(m)h(m)$$

می‌توان این قضیه را نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۱. همه‌ی بخش‌یاب‌های مثبت چند جمله‌ای f ، ارتفاع‌هایی کوچک‌تر از m دارند. در ضمن اگر داشته باشیم:

$$f = gh \quad (2)$$

این برابری هم برقرار است:

$$[f] = [g][h] \quad (3)$$

از این قضیه می‌توان به طور مستقیم، قاعده‌ی زیر را درباره‌ی تجزیه‌ی یک چند جمله‌ای مثبت به دو چند جمله‌ای مثبت نتیجه گرفت:

قاعده: f را یک چند جمله‌ای مثبت فرض کنید. عدد m را بزرگ‌تر از همه‌ی ضریب‌های چند جمله‌ای انتخاب می‌کنیم، عدد $[f]$ را پیدا و آن را به عامل‌های خود تجزیه می‌کنیم. برای هر زوج بخش‌یاب‌های متمم یکدیگر a و b از عدد $[f]$ (که بزرگ‌تر از m باشد)، چند جمله‌ای‌های مثبت g و h را در ارتباط با آن‌ها (در مبنای m) تشکیل می‌دهیم. همه‌ی بخش‌یاب‌های چند جمله‌ای f که متمم یکدیگر باشند، بین همین زوج‌های (g, h) خواهند بود. برای همه‌ی زوج‌ها، حاصل ضرب gh را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را با چند جمله‌ای f مقایسه می‌کنیم؛ از این مقایسه یا تجزیه، f به صورت ضرب دو چند جمله‌ای مثبت به دست می‌آید و یا روشن می‌شود که چند جمله‌ای f قابل تجزیه به دو چند جمله‌ای مثبت نیست.

این قاعده ثمربخش است و امکان عملی برای پیدا کردن بخش‌یاب‌های مثبت یک چند جمله‌ای مثبت را به ما می‌دهد. با این حال، آن را می‌توان کامل کرد، به شرطی که آن را با قاعده‌ی جدا کردن زوج‌هایی از بخش‌یاب‌های $[f]$ که لازم نیستند، همراه کنیم؛ یعنی زوج‌هایی که منجر به بخش‌یاب‌های f نمی‌شوند. فرض کنید:

لازم اند، بلکه کافی هم هستند. به جز این، این قضیه هم درست است:

قضیه ۲: چند جمله‌ای‌های g و h ، بخش‌یاب‌های متمم a و b از عددهای $[f]$ ، تنها وقتی بخش‌یاب‌های متمم یکدیگر از چند جمله‌ای f هستند که رابطه‌ی (۷) برقرار باشد. اثبات. چند جمله‌ای $f = gh$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید:

$$F = A_N x^N + A_{N-1} x^{N-1} + \dots + A_1 x + A_0.$$

همچنین فرض کنید، همچون قبل داشته باشیم:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

$$h = c_q x^q + c_{q-1} x^{q-1} + \dots + c_1 x + c_0.$$

بنابراین: $N = p + q$. بنا بر قانون ضرب چند جمله‌ای‌ها، هر ضریب A_k (k برابر ۰، ۱، ...، N) از چند جمله‌ای F برابر است با مجموع همه‌ی حاصل ضرب‌های $b_i c_j$ که در آن: $i + j = k$. به عنوان نمونه:

$$A_0 = b_0 c_0.$$

$$A_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

از طرف دیگر، بنا بر شرط: $[f] = [g][h]$ ، یعنی:

$$(a_n \dots a_0)_m = (b_p \dots b_0)_m \cdot (c_q \dots c_0)_m$$

با توجه به قانون ضرب عددهای چندرقمی، برای محاسبه‌ی رقم a_i ، واحد حاصل ضرب، باید رقم‌های b و c را در هم ضرب کرد و از حاصل ضرب $b_i c_j$ رقم واحد بالاتر «دهگان» را کم کرد. بنابراین، اگر در حاصل ضرب $b_i c_j$ به اندازه‌ی ε «دهگان» داشته باشیم، آن وقت:

$$a_i = b_i c_j - m \varepsilon. \Rightarrow a_i = A_i - m \varepsilon. \quad (A_i)$$

سپس عدد «دهگان» حاصل ضرب برابر است با مجموع $b_i c_j + b_1 c_i = A_1$ ، به اضافه‌ی عدد «دهگان» ε که بعد از ضرب واحدها به دست آمده است. بنابراین، «رقم دهگان» از عدد $A_1 + \varepsilon$ به دست می‌آید، بعد از کم کردن «صدگان» آن. به زبان دیگر:

$$a_1 = A_1 + \varepsilon - m \varepsilon_1 \quad (A_1)$$

که در آن، ε_1 عددی نامنفی و درست است. به همین

ترتیب:

$$a_r = A_r + \varepsilon_r - m \varepsilon_r \quad (A_r)$$

و به طور کلی، برای $k = 0, 1, 2, \dots, N$:



معناست که: زوج‌های (a, b) که متمم یکدیگر از عدد $[f]$ هستند و در نتیجه استفاده از قاعده‌ی بالا به دست می‌آیند، به تغییر زوج‌های (g, h) که بخش‌یاب‌های متمم چندجمله‌ای f را معین می‌کنند، منجر نمی‌شوند. به زبان دیگر، برای این زوج‌ها، آزمایش $f = gh$ لزومی ندارد.

یادداشت: می‌دانیم، دو چندجمله‌ای درجه‌ی n ، تنها وقتی بر هم منطبق هستند که در $n+1$ نقطه مشترک باشند. با توجه به قضیه‌ی ۲، برای منطبق بودن چندجمله‌ای‌های f و gh کافی است (بدون توجه به درجه‌ی آن‌ها) این چندجمله‌ای‌ها در دو نقطه‌ی $x=1$ و $x=m$ یکسان باشند.

چند مثال: برای این که این روش را روشن کنیم، چند نمونه‌ی ساده ولی به اندازه‌ی کافی روشن کننده می‌آوریم. مثال ۱. همه‌ی بخش‌یاب‌های این چندجمله‌ای مثبت را پیدا کنید:

$$f = 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + x + 7$$

ارتفاع این چندجمله‌ای برابر است با ۷، به نحوی که می‌توانیم m را برابر ۱۰ بگیریم. ولی به سادگی دیده می‌شود (برای نمونه از روی جدول عددهای اول) که عدد:

$$f(10) = 6700417$$

عددی اول است. بنابراین، این چندجمله‌ای بخش‌یاب‌های مثبت ندارد.

مثال ۲. مطلوب است همه‌ی بخش‌یاب‌های مثبت این چندجمله‌ای

$$f = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5$$

در این جا هم می‌توانیم $m = 10$ بگیریم. عدد:

$$f(10) = 255855$$

به این صورت، به عامل‌های اول تجزیه می‌شود:

$$255855 = 3 \times 5 \times 37 \times 461$$

بنابراین، می‌توان به پنج امکان تجزیه‌ی عدد $f(10)$ به حاصل ضرب دو بخش‌یاب بزرگ‌تر از ۱۰ رسید:

$$f(10) = 15 \times 17057$$

$$= 111 \times 2305$$

$$= 185 \times 1383$$

$$= 37 \times 6915$$

$$= 461 \times 555$$

$$a_k = A_k + \varepsilon_{k-1} - m\varepsilon_k \quad (A_k)$$

و در حالت خاص:

$$a_N = A_N + \varepsilon_{N-1} - m\varepsilon_N \quad (A_N)$$

(به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که: $0 \leq n$)

آنچه مربوط به رقم‌های از a_{N+1} تا a_n می‌شود، اگر این رقم‌ها وجود داشته باشند، یعنی $N < n$ باشد، آن‌ها رقم‌های عدد ε_N هستند (در مبنای عددشماری m):

$$\varepsilon_N = a_n m^{n-N} + \dots + a_{N+2} m + a_{N+1} \quad (9)$$

اگر برابری‌های (A_n) تا (A_N) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$a_n + \dots + a_N = (A_n + \dots + A_N)$$

$$- (m-1)(\varepsilon_n + \dots + \varepsilon_{N+1}) - m\varepsilon_N$$

عدد $a_{N+1} + \dots + a_n$ را به دو طرف این برابری اضافه می‌کنیم

و برابری (۹) را در نظر می‌گیریم و به این رابطه می‌رسیم:

$$a_n + \dots + a_N = (A_n + \dots + A_N)$$

$$- (m-1)(\varepsilon_n + \dots + \varepsilon_N)$$

$$- [a_n(m^{n-N+1} - 1) + \dots + a_{N+2}(m-1)]$$

ولی:

$$a_n + \dots + a_N = f(1) = \sigma([f])$$

و مشابه آن:

$$A_n + \dots + A_N = F(1) = g(1)h(1)$$

$$= \sigma([g])\sigma([h]) = \sigma(a)\sigma(b)$$

بنابراین، با توجه به شرط:

$$a_n + \dots + a_N = A_n + \dots + A_N$$

و به این دلیل که:

$$(m-1)(\varepsilon_n + \dots + \varepsilon_N)$$

$$+ [a_n(m^{n-N+1} - 1) + \dots + a_{N+2}(m-1)] = 0$$

که تنها به ازای:

$$\varepsilon_n = \dots = \varepsilon_{N-1} = \varepsilon_N = 0$$

برقرار است (که به معنای $a_n = \dots = a_{N+1} = 0$ است).

به این ترتیب ثابت شد، با تغییر عدد‌های $[g]$ و $a = [g]$

«جابه‌جایی دهگان‌ها» پیش نمی‌آید؛ یعنی:

$$N = n$$

$$a_n = A_n, a_1 = A_1, \dots, a_n = A_n$$

قضیه‌ی ۲ به طور کامل ثابت شد. اثبات این قضیه به این

باید این شرط‌ها برقرار باشد:

$$A([f]) = A(a)A(b), \quad B([f]) = B(a)B(b)$$

که تنها تجزیه‌ی دوم قابل پذیرش است. این تجزیه برای کافی بودن شرط هم درست است:

$$3+5+5+8+5+5 = (1+1+1)(2+3+5)$$

$$(30 = 3 \times 10)$$

بنابراین: $(x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x^2 + 5)$ به جز این، f بخش‌های مثبت دیگری ندارد.

مثال ۳. این چندجمله‌ای را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$f = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$

این چندجمله‌ای مثبت نیست. ولی با ضرب آن در -1 و تبدیل x به $-x$ ، به چندجمله‌ای مثبت تبدیل می‌شود. در نتیجه به این چندجمله‌ای می‌رسیم:

$$g = x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$

برای تجزیه‌ی این چندجمله‌ای به صورت ضرب عامل‌های خود، می‌توان از دو روش استفاده کرد: نخست می‌توان $m = 100$ گرفت (باید در نظر داشت، به عنوان m بهتر است از k استفاده کنیم که ساده‌تر می‌توان آن را به مبنای ده تبدیل کرد). پس از اندکی محاسبه، می‌توانیم برای عدد:

$$g(100) = 10513222720$$

این تجزیه را پیدا کنیم:

$$g(100) = 10304 \times 1020305$$

برای این که به دستگاه عددشماری با مبنای ۱۰۰ بپردازیم، کافی است این عددها را از راست به چپ به «مرزهای» دورقمی تقسیم کنیم:

$$1,05,13,22,27,20 = 1,03,04 \times 1,02,03,05$$

شرط کافی را آزمایش می‌کنیم:

$$(1+05+13+22+27+20)$$

$$= (1+03+04)(1+02+03+05)$$

$$(88 = 8 \times 11)$$

بنابراین:

$$x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$

$$= (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 2x^2 + 3x + 5)$$

و در نتیجه:

$$x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$

$$= (x^2 - 3x + 4)(x^2 - 2x^2 + 3x - 5)$$

اگر بخواهیم از عددهای بزرگ پرهیز کنیم، می‌توان m را عدد کوچک‌تری گرفت. برای نمونه می‌توان فرض کرد $m = 30$. در این صورت خواهیم داشت:

$$g(30) = 28721630 = 2 \times 5 \times 7 \times 71 \times 5779$$

بدون زحمت روشن می‌شود که چندجمله‌ای g بخش‌های درجه‌ی اول ندارد. بنابراین برای عدد $g(30)$ باید بخش‌های متمم بزرگ‌تر از عدد 30^2 ، یعنی ۹۰۰ را انتخاب کرد. این زوج بخش‌ها وجود دارند. به سادگی روشن می‌شود که تنها سه تا هستند:

$$g(30) = 5779 \times 4970$$

$$= 11558 \times 2485$$

$$= 28895 \times 994$$

شرط لازم (۶) را آزمایش می‌کنیم. یادآور می‌شویم، رقم سمت راست $A(a)$ از عدد a در دستگاه عددشماری با مبنای ۳۰ برابر است با باقی مانده‌ی تقسیم این عدد بر 30 (روشن است که این یادآوری جنبه‌ی کلی دارد)، و با انجام این تقسیم خیلی زود به دست می‌آوریم:

$$A(5779) = 19, \quad A(4970) = 20,$$

$$A(11558) = 8, \quad A(2485) = 25,$$

$$A(28895) = 15, \quad A(994) = 4,$$

$$A(28721630) = 20$$

شرط (۶)، تنها برای زوج سوم صادق است. برای این زوج، شرط کافی (۷) را آزمایش می‌کنیم. عددهای ۲۸۸۹۵ و ۹۹۴ را در دستگاه عددشماری به مبنای ۳۰ قرار می‌دهیم و به دست می‌آید:

$$28895 = (1235)_30$$

$$994 = (134)_30$$

بنابراین:

$$\sigma(28895) = 11$$

$$\sigma(994) = 8$$

در عین حال، عدد $\sigma([g])$ برابر است با مجموع ضرب‌های چندجمله‌ای g ، یعنی ۸۸. به این ترتیب، شرط (۷) هم صادق است و در نتیجه:

$$g = (x^2 + 2x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 4)$$

و دوباره به همان تجزیه حالت پیش می‌رسیم.