

اتحاد و معادله

پرویز شهریاری



دانش آموزی می خواهد این معادله مثلثاتی را حل کند:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cot x - 1 \quad (1)$$

او راه حل عادی را برای حل انتخاب می کند و از رابطه مربوط به مجموع تانژانت دو کمان یاری می گیرد:

$$\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = \frac{2}{\tan x} - 1 \quad (2)$$

دو سمت برابری را به یک مخرج تبدیل می کند و صورت ها را برابر قرار می دهد:

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$$

از آن جا که $\tan x$ برابر $\frac{1}{2}$ شده است، نه ۰ و نه ۱، در پاسخی که پیدا شده است، تردیدی وجود ندارد و ضمن آزمایش هم، درستی آن روشن می شود (در واقع، حتی آزمایش هم لازم نیست). به نظر می رسد که همه چیز مرتب است. با وجود این، بهتر است در داوری شتاب نکنید.

در معادله اصلی، $x = \frac{\pi}{2}$ یا هر یک از عددهای

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ را قرار دهید. متوجه می شوید که در معادله}$$

صدق می کند؛ یعنی این ها هم ریشه معادله هستند. این ریشه ها را، ضمن عبور از معادله (۱) به معادله (۲) از دست

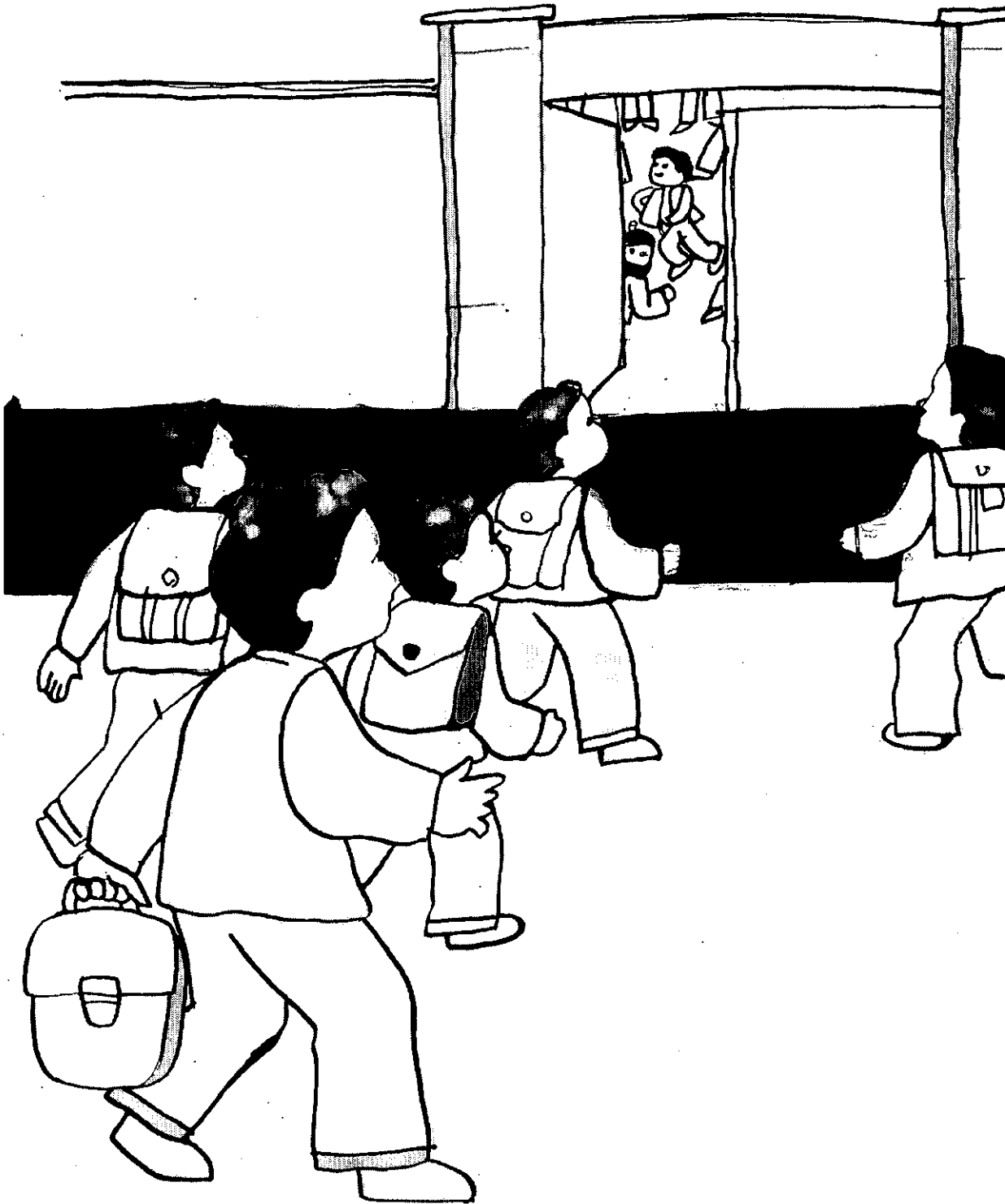
داده ایم؛ زیرا $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ که در معادله (۱) صدق

می کند، در معادله (۲) صادق نیست. مگر نه این است که $\tan$ به ازای این مقادیر مفهوم خود را از دست می دهد؟ بنابراین همه مطلب را باید در این تبدیل ها جست و جو کرد:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

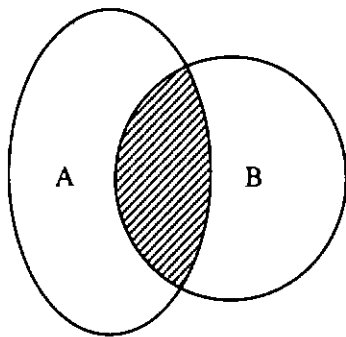
سمت چپ برابری ها، به ازای $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ وجود

دارند. در حالی که برای سمت راست، به دلیل وجود $\tan x$ استفاده از این مقادیرهای x ممنوع است.



چه دشواری‌هایی که پدید نمی‌آید!
اما همه چیز را نمی‌شود از پیش و با تصور حل کرد. از
تعریف اتحاد آغاز می‌کنیم. برخی از دانش‌آموزان، اتحاد
را این طور تعریف می‌کنند: اتحاد، عبارت است از یک
برابری که هر دو سمت آن به ازای هر مقدار دلخواه و قابل
قبول حرف‌ها، به مقدارهای عددی برابر تبدیل شود.

به طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید: وقتی از
رابطه‌هایی استفاده کرده‌ایم که نام اتحاد مثلثاتی را دارند،
چگونه ممکن است چنین وضعی پیش آید؟ به ظاهر، باید
به یاری اتحادها، تنها به تبدیل‌های اتحادی برسیم؛ یعنی
تبدیل‌هایی که موجب به هم خوردن هم‌ارزی نشوند و اگر
اعتماد ما در این زمینه متزلزل شود، در راه حل معادله‌ها،



بنابراین، باید به چنان برابری اتحاد گفت که:

۱. حوزه‌های تعریف سمت چپ و راست برابری بر یکدیگر منطبق باشند.

۲. به ازای همه مقادیر قابل قبول حرف‌ها برقرار باشند.

چنین تعریفی، دیگر درباره برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ صدق نمی‌کند. همچنین نمی‌توانیم برابری $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$ را اتحاد بدانیم.

برای این که از اصطلاح‌های نامتعارف پرهیز کنیم، همه اتحادها را به دو گروه «مطلق» و «غیرمطلق» تقسیم می‌کنیم. اتحاد مطلق به آن‌هایی می‌گوییم که استفاده از آن‌ها، هم‌ارزی را به هم نزنند. بقیه «اتحادها» را تنها می‌توان «اتحادهای مشروط» دانست که ما آن‌ها را «غیرمطلق» نامیده‌ایم. همه ما عادت کرده‌ایم که از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad (3)$$

$$\text{Log}_a (x \cdot y) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y \quad (4)$$

ولی این اتحادها به هیچ وجه بی‌آزار نیستند. اگر در معادله‌ای، از این اتحادها استفاده کنیم و به جای سمت چپ، سمت راست را قرار دهیم، به معنای آن است که حوزه تعریف را تنگ‌تر کرده‌ایم و در نتیجه، ممکن است جواب‌هایی را از دست بدهیم. این وضع را می‌توان به خوبی در این معادله ملاحظه کرد:

$$\text{Log}[x(x+9)] + \text{Log} \frac{x+9}{x} = 0 \quad (5)$$

اگر این معادله را با توجه به رابطه (۴) تبدیل کنیم، به

ولی این مقادیر قابل قبول برای حرف‌ها کدامند؟ این‌ها، مقادیری از حرف‌ها هستند که به ازای آن‌ها هر دو سمت برابری، به طور هم‌زمان، دارای معنا باشند؛ یعنی به ازای آن‌ها، مقادیر عدد مشخصی را بپذیرند.

به این ترتیب، اتحاد حالتی از برابری است. به عنوان مثال، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به ازای هر مقدار دلخواه x و $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ برای هر مقدار دلخواه x و y برقرارند. اما آیا در این تعریف، همه چیز و برای همه جا درست است؟

اگر کسی بگوید برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ یک اتحاد است، به احتمال زیاد کسی با او موافقت نخواهد کرد؛ درحالی که این برابری با تعریفی که از اتحاد کردیم، سازگار است. خودتان دآوری کنید: سمت چپ برابری برای $x \geq 0$ و سمت راست آن برای $x \leq 0$ وجود دارد. بنابراین، مقادیر قابل قبول برای x ، تنها شامل یک عدد است: $x = 0$ و چون به ازای $x = 0$ ، دو سمت برابری مساوی می‌شوند، می‌توان حکم کرد: این برابری به ازای همه مقادیر قابل قبول x برقرار است. به این ترتیب، برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ با تعریف اتحاد سازگار است.

اکنون ریاضیدانی را پیش خود مجسم کنید که بخواهد از این اتحاد برای حل معادله‌ای استفاده کند. اگر در جای دیگر، ضمن تبدیل‌ها، هم‌ارزی را به هم نزنند، تنها می‌تواند یک ریشه صفر را در نتیجه عمل‌های خود به دست آورد (اگر چنین ریشه‌ای برای معادله مفروض وجود داشته باشد) و سایر ریشه‌های احتمالی معادله او گم می‌شوند.

به این ترتیب، نخستین کمبود این تعریف، آن است که ما را از مقایسه دو سمت اتحاد با یکدیگر، محروم می‌کند و امکان این دآوری را نمی‌دهد. دو سمت اتحاد، از نظر اتحادی، با هم تفاوت دارند. با این تعریف، نباید A و B را، که در شکل می‌بینید، از نظر اتحادی متفاوت بدانیم؛ تنها به این دلیل که بخش مشترکی دارند. باید دو تابعی را که یکی از آن‌ها در مجموعه A و دیگری در مجموعه B وجود دارد، متحد بنامیم؛ تنها به این خاطر که مقادیر این دو تابع، در بخش خط‌خورده، بر هم منطبقند.



این صورت درمی آید:

$$\text{Log} x + \text{Log}(x+9) + \text{Log}(x+9) - \text{Log} x = 0$$

که از آن جا به دست می آید:

$$\text{Log}(x+9) = 0 \Rightarrow x+9=1 \Rightarrow x=-8$$

ولی این جواب در معادله اصلی صدق نمی کند. زیرا لگاریتم عددهای منفی معنا ندارد. از طرف دیگر، $x = -10$ در معادله صدق می کند و ما ضمن تبدیلی که انجام دادیم، آن را گم کرده ایم. بنابراین، برای حل معادله ها، از اتحادهای (۳) و (۴)، تنها می توانیم از راست به چپ استفاده کنیم؛ یعنی به جای سمت راست، مقدار سمت چپ را قرار دهیم. با این تبدیل، ممکن است جواب های بیگانه وارد معادله شوند که البته می توان آن ها را با آزمایش پیدا کرد. ولی اگر ناچار باشیم برای حل معادله ای از رابطه لگاریتمی استفاده کنیم، باید آن را به این صورت بنویسیم:

$$\text{Log}_a(x \cdot y) = \text{Log}_a|x| + \text{Log}_a|y|$$

درباره ریشه دوم هم باید به همین ترتیب بنویسیم؛ یعنی از قدر مطلق ها استفاده کنیم. معادله (۵) را باید به این صورت حل کرد:

$$\text{Log}|x| + \text{Log}|x+9| + \text{Log}|x+9| - \text{Log}|x| = 0$$

$$|x+9|=1 \Rightarrow x_1=-8, x_2=-10$$

که بعد از آزمایش معلوم می شود: $x = -10$. تشخیص اتحادهای مطلق از غیر مطلق در بین رابطه های مثلثاتی، اندکی دشوارتر است. ما به این رابطه ها عادت کرده ایم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\text{Cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

اما آیا می توان تعریف $\cot x$ را هم به صورت $\frac{1}{\tan x}$

داد؟ گمان می کنم همه روی این مطلب توافق داشته باشند که تعریف باید بر یک اتحاد مطلق متکی باشد. مفهوم اتحاد این است که ما حق داریم برای مفهومی، نام تازه ای

انتخاب کنیم که به وسیله واژه انتخاب شده است و یا این که به جای «سمت چپ»، «سمت راست» را در نظر بگیریم. اگر برای تعریف کتانژانت از رابطه

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$\cot x$ به ازای $x = k\pi$ (که مخرج را برابر صفر می کند) و

$$\text{به ازای } x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ (که در آن جا، تانژانت معنای خود}$$

را از دست می دهد) وجود ندارد؛ در حالی که اگر کتانژانت

را با رابطه $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ تعریف کنیم، تنها مقدارهای

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad x = k\pi \text{ حذف می شوند. بنابراین برابری}$$

یک اتحاد مطلق نیست و اگر در معادله ای به جای $\cot x$ ،

مقدار سمت راست، یعنی $\frac{1}{\tan x}$ را قرار دهیم، ممکن

است ریشه هایی از دست بروند (همان گونه که درباره

معادله (۱) ملاحظه کردید). از این شگفت آورتر، دو

رابطه مربوط به تانژانت، نصف کمان است:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (6)$$

در نگاه اول، این دو رابطه ارزشی برابر دارند و به سختی می توان یکی را بر دیگری ترجیح داد. ولی اگر آن ها را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

معادله را روشن کند. می خواهیم این دستگاه معادله ها را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2\sin x \cos y = 2 - \sin^2 y \sin z & (9) \\ (\sin z)^{\cos z} = \frac{1}{\sin^2 z} & (10) \end{cases}$$

برای حل، راحت تر است از معادله دوم آغاز کنیم. می دانیم اگر دو توان برابر دارای پایه های برابر باشند؛ به شرطی که این پایه مخالف ۰ و ۱ باشد، می توان نماها را برابر قرار داد، بنابراین با شرط:

$$\sin z \neq 0, +1, -1$$

از معادله دوم نتیجه می شود $\cos z = -2$ و این جواب ممکن نیست. اکنون باید حالت هایی را که استثنا کردیم، آزمایش کنیم.

$\sin z = 0$ در معادله دوم دستگاه صدق نمی کند. فرض می کنیم $\sin z = 1$ معادله اول دستگاه چنین می شود:

$$2\sin x \cos y = 1 + \cos^2 y \quad (11)$$

به موقعیت نامناسبی می رسیم که ما را در همان جای نخست قرار داده است: تعداد معادله ها کم تر از تعداد مجهول هاست؛ ولی گاهی یک معادله دو مجهولی، طوری تنظیم شده است که درون خود دو معادله دارد. نمونه ساده ای از این نوع، معادله $x^2 + y^2 = 0$ است که با دستگاه $x = y = 0$ ، هم ارز است؛ زیرا مجموع دو عبارت غیر منفی، تنها وقتی برابر صفر می شود که هر کدام از جمله های آن برابر صفر باشد. در این جا هم، همین وضع وجود دارد. برای این که مطلب روشن شود، کافی است معادله (۱۱) را به این صورت بنویسیم:

$$(\cos y - \sin x)^2 + \cos^2 x = 0$$

که از آن جا به این دستگاه می رسیم:

$$\cos y = \sin x, \cos x = 0$$

و در نتیجه، جواب پیدا می شود:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad y_1 = 2m\pi, \quad z_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad y_2 = (2m+1)\pi, \quad z_2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

به روشنی معلوم می شود که هر دو طرف رابطه اول، به ازای $\cos \frac{x}{2} = 0$ ، معنای خود را از دست می دهند؛

درحالی که رابطه دوم به جز آن، به ازای $\sin \frac{x}{2} = 0$ هم بی معنا می شود. بنابراین رابطه اول، یک اتحاد مطلق و رابطه دوم یک اتحاد غیر مطلق است. اگر معادله:

$$\tan \frac{x}{2} + \tan x = 0 \quad (V)$$

را به کمک رابطه دوم (۶) تبدیل کنیم، به دست می آید:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad (A)$$

در نتیجه، معادله (V) به معادله (A) تبدیل می شود که هم ارز آن نیست؛ زیرا $x = 2k\pi$ که در معادله (V) صدق می کند، جزو ریشه های معادله (A) نیست. با وجود این، اگر معادله (A) را به طور صوری حل کنیم، این ریشه ها هم به دست می آیند و چون باید ریشه ها را در معادله آزمایش کنیم، همه ریشه ها پیدا می شوند:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2k\pi, \quad x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

با برخی محدودیت های اضافی، می توان ثابت کرد: هر تبدیلی از تانژانت و کتانژانت به سینوس و کسینوس، حتی بدون توجه به این نکته، آیا اتحاد مورد استفاده مطلق است یا نه؟ در آخر کار، به همه جواب های معادله دست می یابیم؛ زیرا عمل های بینایی، خودبه خود جواب از دست رفته را جبران می کنند.

وقتی برای معادله ای، از اتحاد غیر مطلق استفاده می کنید که در نتیجه آن حوزه تعریف تنگ تر می شود، دست کم باید تحقیق کرد، آیا ریشه ای از دست رفته است؟ با وجودی که در بسیاری حالت ها، این آزمایش به نتیجه ای منفی می رسد، نباید از آن غفلت کرد؛ چرا که بدون آن، مسأله از لحاظ منطقی، به طور کامل حل نشده است.

نمونه ای می آوریم که می تواند نکته ظریفی از تعریف

حالت $\sin z = -1$ را هم می‌توان به همین ترتیب بررسی کرد و به این جوابها رسید:

$$x_F = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad y_F = 2m\pi, \quad z_F = 2n\pi - \frac{\pi}{2};$$

$$x_F = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad y_F = (2m+1)\pi, \quad z_F = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

به یک نکته جدی توجه کنیم. معادله به طور معمول به صورت برابری دو تابع تعریف می‌شود؛ در این صورت، حوزه تعریف معادله را می‌توان از روی تعریف تابع‌ها معین کرد. این تعریف تنها درباره معادله‌هایی از نوع (10) ، نامناسب به نظر می‌رسد. دشواری به این جا مربوط می‌شود که x^y تنها به ازای $x > 0$ معین است؛ درحالی که عبارت‌هایی از گونه $a^{(-1)}$ ، به ازای همه مقادیرهای درست a معنا دارند. اگر این تعریف معادله، به طور سطحی در نظر گرفته شود، ممکن است به این جا منجر شود که جواب $\sin z = -1$ را در دستگاه (9) و (10) کنار بگذاریم، که درست نیست. اما اگر دستگاه (9) و (10) را بازتابی از یک روند فیزیکی واقعی بدانیم، می‌توان امید داشت که این جواب دوم هم، مثل جواب اول، معنای فیزیکی داشته باشد.

در زمان ما، معادله را به عنوان برابری دو عبارت تعریف نمی‌کنند؛ معادله را گزاره‌ای می‌دانند که به ازای بعضی از مقادیرهای حرف‌ها به «گزاره‌ای درست» و به ازای بعضی مقادیرها به «گزاره‌ای نادرست» تبدیل می‌شود. به این ترتیب، معادله صورتی «منطقی» به خود می‌گیرد. حل معادله، یعنی انتخاب مجهول‌ها، به نحوی که این صورت منطقی را به گزاره‌ای درست برساند. اگر معادله را به این صورت تعریف کنیم، دیگر تناقضی بین حوزه تعریف تابع‌ها، با حوزه تعریف معادله پیدا نمی‌شود.

در پایان، چند پرسش را به همراه پاسخ آن‌ها می‌آوریم:
۱- آیا می‌توان حکم کرد که در اتحاد مطلق، می‌توان جمله‌ها را از یک طرف، به طرف دیگر منتقل کرد؟
پاسخ: با انتقال جمله‌ها از یک طرف به طرف دیگر، ممکن است اتحاد مطلق بودن خود را از دست بدهد. برای

نمونه، $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ یک اتحاد مطلق است؛ در حالی که $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ غیر مطلق می‌شود.

۲- حل معادله در این جا آورده شده است. این راه حل را ارزیابی کنید:

$$\sin 2x + \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{v} = 0$$

$\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\sqrt{1 - \tan^2 x}}{1 + \tan^2 x} + \sqrt{v} = 0$$

به یک مخرج تبدیل می‌کنیم و مخرج را که همیشه مخالف صفر است، از بین می‌بریم:

$$\tan x = -\sqrt{v} \Rightarrow x = k\pi + \arctan(-\sqrt{v})$$

پاسخ: درست نیست؛ زیرا با استفاده از اتحادهای

غیر مطلق، جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ را از دست داده‌ایم.

۳- این معادله را حل کنید.

$$\sqrt{\tan x + \sin x} + \sqrt{\tan x - \sin x} = 2\sqrt{\tan x} \cdot \cos x$$

پاسخ: داریم: $\tan x \pm \sin x = \tan x(1 \pm \cos x)$

دو عامل $\tan x$ ، $1 \pm \cos x$ غیر منفی اند؛ بنابراین می‌توان از اتحاد غیر مطلق $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ استفاده کرد و به برابری به این صورت می‌رسیم:

$$\sqrt{\tan x} (f(x)) = 0$$

جواب:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{v\pi}{6}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad x_3 = k\pi$$

