

معادله‌های

مثلثاتی

۱۰
اتحاد و معادله

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم



پرویز شهریاری

مثلثاتی، از این جهت برای هر ایرانی سودمند است که به تقریب، همه‌ی دستورهای و رابطه‌های مثلثاتی در ایران سده‌های سوم تا نهم هجری خورشیدی به دست آمده است و کسانی همچون خوارزمی، ابوالوفای بوزجانی، ابوریحان بیرونی و غیاث الدین جمشید کاشانی در تنظیم آن‌ها دخالت داشته‌اند. ایران، در آن قرون، بعد از دوران ریاضیات نظری یونان، در دوران ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و مثلثات را هم به خاطر نیازهای اخترشناسی پدید آورد. خواجه نصیر

همان‌طور که در بحث مربوط به معادله‌های جبری دیدیم، درباره‌ی معادله‌های مثلثاتی هم، به راه‌حل‌ها و دستورهای معادله‌های ساده یا معادله‌های رسمی نمی‌پردازیم، زیرا می‌توان این دستورها را در کتاب‌های دبیرستانی یا سلسله مقاله‌های معادله‌های مثلثاتی در همین مجله پیدا کرد. گرچه در برنامه‌های درسی تازه به مثلثات اهمیت داده نشده است، ولی می‌توان با مراجعه به کتاب‌های قدیمی‌تر، رابطه‌های مربوط به آن را پیدا کرد. پرداختن به مثلثات و معادله‌های

$$-\cos \frac{x}{3} = 1, \text{ زیرا با توجه به شرط داریم:}$$

$$\cos 2x - \cos \frac{x}{3} \leq 2 \text{ به این ترتیب، معادله‌ی مفروض هم‌ارز این دستگاه است.}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ -\cos \frac{x}{3} = 1 \end{cases}$$

از آن‌جا داریم:

$$\begin{cases} x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = 2(2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

که حل آن، منجر به حل معادله‌ی $k=2(2n+1)$ مجموعه‌ی عددهای درست می‌شود. از آن‌جا که n عددی درست است، k هم عددی درست می‌شود و همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض با این دستور مشخص می‌شود:

$$x = 2(2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{مسئله‌ی سوم. } 3\left|x - \frac{1}{4}\right| + 2 - 4\sin 2\pi x = 5 \text{ حل. برای همه‌ی } x \text{ ها داریم:}$$

$$3\left|x - \frac{1}{4}\right| + 2 \geq 9, -4\sin 2\pi x \geq -4$$

بنابراین تابع‌های سمت چپ برابری با حداقل مقدار آن‌ها برابری؛ از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 3\left|x - \frac{1}{4}\right| + 2 = 9 \\ -4\sin 2\pi x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = k + \frac{1}{4} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

این دستگاه، در نتیجه معادله‌ی مفروض، تنها یک جواب

$$\text{دارد: } x = \frac{1}{4}.$$

مسئله‌ی چهارم.

$$2\cos(\pi x^2) + \frac{6}{\pi} \arcsin(x^2 - 2) + x^2 - 2x + 6 = 0$$

حل. به سادگی می‌توان روشن کرد که برای هر

$$x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}],$$

$$2\cos(\pi x^2) \geq -2; \frac{6}{\pi} \arcsin(x^2 - 2) \geq -3;$$

$$x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5 \geq 5$$

مجموع کمترین مقدارهای جمله‌های سمت چپ معادله،

توسی با نوشتن کتاب «کشف القناع» خود، در واقع نخستین کتاب مثلثات را نوشت که در آن، همه‌ی تلاش‌های ایرانیان را در زمینه‌ی مثلثات جمع کرده است. یکی از دشواری‌های مثلثات پیدا کردن سینوس یک درجه بود. تا سینوس کمان سه درجه برای آن‌ها قابل محاسبه بود (زیرا تابع‌های مثلثاتی سه درجه را از روی تابع‌های مثلثاتی ۱۸ درجه و ۱۵ درجه می‌دانستند، و لازم بود از روی سینوس سه درجه، خود را به سینوس یک درجه برسانند). جمشید کاشانی با حل جبری معادله‌ای که سینوس یک درجه را با معلوم بودن سینوس سه درجه به دست می‌داد، پیدا کرد و با این روش توانست معادله‌ی درجه سوم را سال‌ها پیش از کاردان حل کند.

در این‌جا به حل چند معادله‌ی مثلثاتی که تا حدی نامتعارف

و غیرعادی هستند، می‌پردازیم:

$$\text{مسئله اول. } \sin \frac{x}{4} + 2\cos \frac{x-2\pi}{3} = 3$$

حل تابع‌های $\sin \frac{x}{4}$ و $2\cos \frac{x-2\pi}{3}$ تنها می‌توانند، بیشترین مقدار ممکن خود را، اولی برابر ۱ و دومی برابر ۲، اختیار کنند. در این صورت سمت چپ برابر $1+2$ ، یعنی ۳ می‌شود. به این ترتیب، معادله‌ی مفروض به صورت این دستگاه درمی‌آید.

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{4} = 1 \\ \cos \frac{x-2\pi}{3} = 1 \end{cases}$$

با حل هر کدام از معادله‌های دستگاه، x به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 2(4k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = 2(3n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

این دستگاه، تنها وقتی پاسخ دارد که معادله‌ی

$$4k+1 = 3n+1$$

جواب‌های درست داشته باشد. از این معادله $4k=3n$

نتیجه می‌شود که از آن‌جا $k = \frac{3}{4}n$. اگر $n=4t$ می‌تواند $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ باشد، $k=3t$ عددی درست می‌شود و در این صورت:

$$x = 2(12t+1)\pi, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

و این برابری شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض است.

$$\text{مسئله‌ی دوم. } \cos 2x - \cos \frac{x}{3} = 2$$

حل. می‌دانیم $\cos 2x \leq 1$ و $-\cos x \leq 1$ ، در این صورت تنها وقتی برابری معادله برقرار است که $\cos 2x = 1$ و

جوابی ندارد.

برابر صفر می شود. بنابراین به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} 2 \cos(\pi x^2) = -2 \\ \frac{6}{\pi} \arcsin(x^2 - 2) = -3 \\ x^2 - 2x + 5 = 5 \end{cases}$$

که از آن جا به دست می آید:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2k+1}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی، دستگاه، تنها یک جواب دارد: $x=1$.

مسئله ی پنجم. $\sin^2(\pi x) + [\log_7(x^2 - 2x + 1)]^2 = 0$

حل. مجموع توان های دوم چند عدد حقیقی، تنها وقتی برابر صفر می شود که هر کدام از آن ها برابر صفر باشند. بنابراین به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0 \\ \log_7(x^2 - 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = 0, 2 \end{cases}$$

جواب های معادله ی اصلی $x_2 = 2$, $x_1 = 0$ است.

مسئله ی ششم. $\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin^2 x$

حل. بعد از تبدیل های روشن، به دست می آید:

$$2 \cos 2x \sin x - 2 \sin 2x + 3 = 0$$

در سمت چپ این معادله $\sin^2 x, \cos^2 2x + \sin^2 2x$ را یک بار اضافه و بار دیگر کم می کنیم که پس از آن، معادله ی مفروض، به این صورت در می آید:

$$(\cos 2x + \sin x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0$$

از آن جا، به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin x = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

از معادله ی آخر دستگاه به دست می آوریم:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k, \text{ عددی درست است})$$

این مقدار x را در معادله ی دوم دستگاه می گذاریم، به دست می آید: $\sin(2k\pi + \pi) - 1 = 0$ که مخالف صفر است. یعنی معادله های دوم و سوم دستگاه، جواب مشترکی ندارند و در نتیجه دستگاه مابقی جواب است، پس معادله ی مفروض،

مسئله ی هفتم. جواب های حقیقی این معادله ی دو مجهولی را پیدا کنید.

$$x^2 y^2 - 16xy^2 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0$$

حل. روشن است که $x = y = 0$ در معادله صدق می کند. برای پیدا کردن جواب های دیگر، سمت چپ معادله را به صورت مجذورهای کامل در می آوریم:

$$(xy^2 - 8y)^2 + (x - 2y)^2 = 0$$

از این جا، به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} xy^2 - 8y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

این دستگاه، به جز جواب $(0, 0)$ ، دو جواب دیگر هم دارد: $(4, 2)$ و $(-4, -2)$. بنابراین، معادله ی مفروض سه جواب دارد:

$$(0, 0) \text{ و } (4, 2) \text{ و } (-4, -2)$$

مسئله ی هشتم. همه ی جواب های این معادله را پیدا کنید:

$$\cos(x - y) - 2 \sin x + 2 \sin y = 3$$

حل. سمت چپ معادله را به صورت مجموع توان های دوم، تبدیل می کنیم:

$$1 - \cos(x - y) + 2(\sin x - \sin y) + 2 = 0;$$

$$2 \sin^2 \frac{x-y}{2} + 4 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + 2 = 0$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \frac{x-y}{2} + 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ & + \cos^2 \frac{x+y}{2} + \sin^2 \frac{x+y}{2} = 0 \end{aligned}$$

و سرانجام:

$$(\sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2})^2 + \sin^2 \frac{x+y}{2} = 0$$

که از آن جا به این دستگاه می رسم:

$$\begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

از معادله ی دوم این دستگاه به دست می آید:

$$\frac{x+y}{2} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\begin{cases} x = 2p\pi - \frac{\pi}{2} \\ y = 2q\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

که در آن‌ها، p و q عددهای درست دلخواهی هستند.
اگر p و q هر دو زوج یا هر دو فرد باشند جواب‌های (I) و اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، جواب‌های (II) به دست می‌آید. و این دستورها، تمام جواب‌های معادله را می‌دهند.

مسئله‌ی نهم. همه‌ی جواب‌های x و y را در این معادله به دست آورید:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y$$

حل. از آن‌جا که $-1 \leq \sin y \leq 1$ است، بنابراین

$$11\frac{1}{2} \leq 12 + \frac{1}{2} \sin y \leq 12\frac{1}{2}$$

بنابراین سمت راست معادله از $12\frac{1}{2}$ بیشتر نیست، این بیشترین مقدار آن است.

برای $x = \frac{\pi}{4}$ ، سمت چپ معادله برابر $12\frac{1}{2}$ می‌شود.

اگر x به سمت $k\pi$ یا $k\pi + \frac{\pi}{2}$ میل کند (k برابر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$)، آن‌گاه سمت چپ معادله به صورت نامحدود رشد می‌کند. ثابت می‌کنیم، برای همه‌ی x ‌ها، سمت چپ معادله از $12\frac{1}{2}$ کمتر نمی‌شود، یعنی این نابرابری را ثابت می‌کنیم:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \geq 12\frac{1}{2} \quad (1)$$

چون $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ ، برای ادامه‌ی کار بهتر

این مقدار $\frac{x+y}{2}$ را در معادله‌ی اول دستگاه قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$\sin \frac{x-y}{2} = (-1)^{k+1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم:

(الف) $k = 2n$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 2n\pi \\ \sin \frac{x-y}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 2n\pi \\ \frac{x-y}{2} = 2m\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(n+m)\pi - \frac{\pi}{2} \\ y = 2(n-m)\pi + \frac{\pi}{2} \\ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (I)$$

(ب) اگر $k = 2n-1$ ، آن وقت:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = (2n-1)\pi \\ \sin \frac{x-y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = (2n-1)\pi \\ \frac{x-y}{2} = 2m\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(n+m)\pi - \frac{\pi}{2} \\ y = 2(n-m-1)\pi + \frac{\pi}{2} \\ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (II)$$

دستورهای (I) و (II) را با هم مقایسه می‌کنیم. در (I) برای هر عدد درست n و m ، عددهای $(n+m)$ و $(n-m)$ یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ ولی در (II)، عددهای $(n+m)$ و $(n-m-1)$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. بنابراین، می‌توان دو دستور (I) و (II) را، به این ترتیب، یکی کرد:



هم‌ارز با دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{4} \\ 12 + \frac{1}{4} \sin y = 12 \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \sin y = 1 \end{cases}$$

بنابراین $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ و $y = (4\pi+1)\frac{\pi}{4}$ ، که در آن‌ها k و n می‌توانند عددهای $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را اختیار کنند. این دستورها شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌اند.

چند معادله در این‌جا برای تمرین آورده‌ایم. داخل کروشه، جواب را داده‌ایم (k و n همه‌جا، برابر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ است).

تمرین

$$1. \left[x = \frac{1}{4} \right], \quad \Delta^{1-2x} = \sin \pi x$$

$$2. \left[x = (3k+1)\frac{\pi}{3} \right], \quad 3 \sin^2 \frac{x}{3} + \Delta \sin^2 x = 8$$

$$3. 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \Delta$$

[جواب ندارد]

$$4. \left[x = (4k+1)\frac{\pi}{4} \right], \quad 4 \sin^2 x - \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$5. \left[x = (2k+1)\pi \right], \quad 1 + \cos^2 x \cos^3 x = \frac{1}{4} \sin^3 3x$$

$$6. \sin^6 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin \frac{x}{4} = 3$$

$$[x = (4n+1)\pi]$$

$$7. 2 + 4 \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 x + \Delta \sin^2 \frac{x}{4} = 8 \sin^2 \frac{x}{4} \sin^2 \Delta x$$

[جواب ندارد]

$$8. [y = 2, x = 3], \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$$

$$9. 4 + \sin^2 x \cos^2 2x = \Delta \sin^2 x \sin^2 y$$

$$\left[y = (2n+1)\frac{\pi}{4}, x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \right]$$

است فرض کنیم: $\sin^2 x = \frac{1}{4} + \alpha$ و چون در این‌جا

$0 < \sin^2 x < 1$ است، بنابراین $0 < \frac{1}{4} + \alpha < 1$ و از آن‌جا

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{4} - \alpha$$

در رابطه‌ی (۱) به جای $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ ، بر حسب α قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$(2) \quad \left(\frac{1}{4} + \alpha + \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \alpha + \frac{1}{\frac{1}{4} - \alpha}\right)^2 \geq 12 \frac{1}{4}$$

سمت چپ رابطه‌ی (۲) را تبدیل می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{4} + \alpha\right)^2 + 2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4} + \alpha\right)^2} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right)^2 + 2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - \alpha\right)^2} =$$

$$= 4 \frac{1}{4} + 2\alpha^2 + \frac{\frac{1}{4} + 2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} - \alpha\right)^2}$$

در حالت $\alpha = 0$ سمت چپ برابر $12 \frac{1}{4}$ می‌شود؛ اگر

$\alpha \neq 0$ ، آن وقت $\alpha^2 > 0$ و در این صورت روشن است که

سمت چپ (۲) چنین خواهد شد:

$$4 \frac{1}{4} + 2\alpha^2 + \frac{\frac{1}{4} + 2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} - \alpha\right)^2} > 4 \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4 \frac{1}{4} + 8 = 12 \frac{1}{4}$$

بنابراین سمت چپ معادله‌ی مفروض از $12 \frac{1}{4}$ کمتر

نیست؛ این، کمترین مقدار آن است که برای $\alpha = 0$ ، یعنی برای

$$\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

درست است.

چون سمت چپ معادله‌ی اصلی، کمتر و سمت راست

آن بیشتر از $12 \frac{1}{4}$ نیست، بنابراین برابری تنها وقتی برقرار است

که هر دو طرف برابر $12 \frac{1}{4}$ باشند، یعنی معادله‌ی مفروض،