

اتحادهای مثلثاتی



● احمد فندهاری

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2 a}{\sin a \cdot \cos a} - \frac{\cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\cos a}{\sin a} = \tan a - \cot a \end{aligned}$$

مسئله ۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha}$$

هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقدارهای متغیر یا متغیرهای تعریف شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می شود.

اتحادهای مثلثاتی معمولاً به سه روش قابل حل هستند: روش اول: یکی از دو طرف اتحاد مثلثاتی را که مفصل تر است، با استفاده از فرمول های مثلثاتی و رابطه های دیگر جبری و مثلثاتی، آن قدر تغییر می دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مسئله ۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(\cot a - 1)^2 + (\cot a + 1)^2 = \frac{2}{\sin^2 a}$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می کنیم تا به عبارت

سمت راست برسیم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= (\cot a - 1)^2 + (\cot a + 1)^2 \\ &= \cot^2 a - 2 \cot a + 1 + \cot^2 a + 2 \cot a + 1 \\ &= 2 \cot^2 a + 2 \\ &= 2(1 + \cot^2 a) \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sin^2 a} \right) = \frac{2}{\sin^2 a} \end{aligned}$$

مسئله ۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1 - 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a} = \tan a - \cot a$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{1 - 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a} \\ &= \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cos a} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(\pi + \alpha - 60^\circ) + \\
 &\quad \cos(\pi + \alpha + 60^\circ) = \\
 &= \cos \alpha - \cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ) \\
 &= \cos \alpha - [\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ)] \\
 &= \cos \alpha - \left[2 \cos \frac{\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ}{2} \times \right. \\
 &\quad \left. \cos \frac{\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ}{2} \right] \\
 &= \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos 60^\circ \\
 &= \cos \alpha - 2 \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \right) = \cos \alpha - \cos \alpha = 0
 \end{aligned}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌های مثلثاتی و اعمال جبری آن قدر ساده می‌کنیم تا به دو مقدار مساوی برسیم.

مسئله ۵. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 - \sin 2\alpha}{2}$$

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد. آن را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha)(2 - \sin 2\alpha)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) \quad \text{توجه:}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)(2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

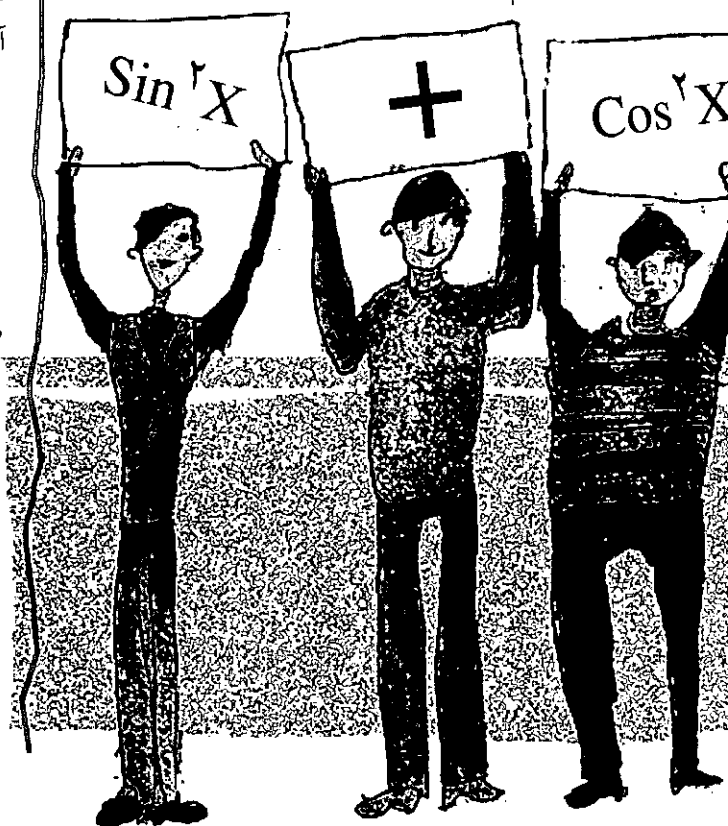
$$2(1 - \sin \alpha \cos \alpha) = 2(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

مسئله ۴. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:



مسئله ۶: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2(1 + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد:

$$2 \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (\sin \alpha)^2 = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

چون:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین داریم:

روش سوم: با نوشتن روابط مناسب و با به کارگیری فرمول‌های مثلثاتی، صورت مسئله را می‌سازیم.

مسئله ۷: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2 \sin x = 2 \sin x$$

دو طرف این تساوی را بر $1 - \cos x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ را در } \frac{\sin x}{\sin x} \text{ ضرب می‌کنیم:}$$

$$\frac{2 \sin^2 x}{\sin(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} + \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} \therefore$$

مسئله ۸: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\cos^2 a + 2 \sin^2 a + \sin^2 a \cdot \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \cos^2 a + \sin^2 a + \sin^2 a + \sin^2 a \cdot \tan^2 a$$

$$= 1 + \sin^2 a(1 + \tan^2 a)$$

$$= 1 + \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} \right)$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

مسئله ۹: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{(a^2 - b^2) \cot(\pi - \alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + \frac{(a^2 + b^2) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cot(\pi - \alpha)} = -2a^2$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{(a^2 - b^2)(-\cot \alpha)}{\cot \alpha} + \frac{(a^2 + b^2) \cot \alpha}{-\cot \alpha}$$

$$= -(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2) = -a^2 + b^2$$

$$-a^2 - b^2 = 2a^2$$

مسئله ۱۰: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2 \sin a - \sin 2a}{2 \sin a + \sin 2a} = \tan^2 \frac{a}{2}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2 \sin a - 2 \sin a \cos a}{2 \sin a + 2 \sin a \cos a}$$

مسئله ۱۲: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

حل: داریم:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$$

عبارت سمت چپ = $\left(\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 \right)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$= 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

نتیجه ۱:

مسئله ۱۳: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

حل: داریم:

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2 b^2)$$

و:

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2 b^2$$

پس:

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2) \left[(a^2 + b^2)^2 - 3a^2 b^2 \right]$$

عبارت سمت چپ = $\left(\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 \right) \times$

$$\left[\left(\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 \right)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right]$$

عبارت سمت چپ = $1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2$

$$= 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2 \sin a (1 - \cos a)}{2 \sin a (1 + \cos a)} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \tan^2 \frac{a}{2}$$

مسئله ۱۱: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = \sin 2a$$

حل:

داریم:

$$\begin{cases} \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \\ \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \end{cases}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a - \frac{\pi}{4} + a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a + \frac{\pi}{4} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$$

$$= \frac{\sin 2a}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin 2a}{1} = \sin 2a$$

مسئله ۱۲: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin 2a \cdot \cos a}{(1 + \cos 2a)(1 + \cos a)} = \tan \frac{a}{2}$$

حل:

عبارت سمت چپ = $\frac{2 \sin a \cdot \cos a \cdot \cos a}{(2 \cos^2 a) \left(2 \cos^2 \frac{a}{2} \right)} = \frac{2 \sin a \cdot \cos^2 \frac{a}{2}}{4 \cos^2 a \left(2 \cos^2 \frac{a}{2} \right)}$

$$= \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \tan \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin 9^\circ}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{\sin 9^\circ}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} \\
 &= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} \\
 &= \frac{2}{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{2}{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ} \\
 &= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} \\
 &= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \\
 &= \frac{2 \times 2 \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2} \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} \\
 &= \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{4 \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ} = 4
 \end{aligned}$$

مسأله‌ی ۱۶: درستی فرمول زیر را اثبات کنید:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \text{عبارت سمت چپ} &= \sin 3a = \sin(2a + a) = \\
 &= \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a \\
 &= (2 \sin a \cos a) \cos a + (1 - 2 \sin^2 a) \sin a \\
 &= 2 \sin a \cos^2 a + \sin a - 2 \sin^3 a \\
 &= 2 \sin a (1 - \sin^2 a) + \sin a - 2 \sin^3 a \\
 &= 2 \sin a - 2 \sin^3 a + \sin a - 2 \sin^3 a \\
 &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a
 \end{aligned}$$

مسأله‌ی ۱۷: درستی فرمول زیر را ثابت کنید:

$$\sin 3a = 4 \sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a)$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \text{عبارت سمت راست} &= 4 \sin a (\sin 60^\circ \cos a - \cos 60^\circ \sin a) \times \\
 &\quad (\sin 60^\circ \cos a + \cos 60^\circ \sin a) \\
 &= 4 \sin a (\sin^2 60^\circ \cos^2 a - \cos^2 60^\circ \sin^2 a) \\
 &= 4 \sin a \left(\frac{3}{4} \cos^2 a - \frac{1}{4} \sin^2 a \right)
 \end{aligned}$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

نتیجه‌ی ۲:

مسأله‌ی ۱۴: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) = \cos 2\alpha (1 + \cos^2 2\alpha)$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned}
 a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\
 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \left[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{عبارت سمت چپ} &= 2(\cos^2 a - \sin^2 a) (\cos^2 a + \sin^2 a) \times \\
 &\quad [(\cos^2 a + \sin^2 a)^2 - 2 \cos^2 a \sin^2 a]
 \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 2(\cos^2 \alpha)(1) [1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2]$$

$$= 2 \cos 2\alpha \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)^2 \right]$$

$$= 2 \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right)$$

$$= 2 \cos 2\alpha \left[1 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2\alpha) \right]$$

$$= 2 \cos 2\alpha \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha \right]$$

$$= 2 \cos 2\alpha \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha \right] = \cos 2\alpha (1 + \cos^2 2\alpha)$$

مسأله‌ی ۱۵: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = (\tan 81^\circ + \tan 9^\circ) - (\tan 63^\circ + \tan 27^\circ)$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \quad \text{داریم:}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin(81^\circ + 9^\circ)}{\cos 81^\circ \cos 9^\circ} - \frac{\sin(63^\circ + 27^\circ)}{\cos 63^\circ \cos 27^\circ}$$

$$\cos 81^\circ = \sin 9^\circ, \quad \cos 63^\circ = \sin 27^\circ \quad \text{توجه:}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 1^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ \quad \text{رابطه ی (I)}$$

در مسأله ی ۱۷ داشتیم:

$$\sin 3a = 4 \sin a \sin(6^\circ - a) \sin(6^\circ + a)$$

فرض می کنیم: $a = 1^\circ$

$$\sin 3^\circ = 4 \sin 1^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} = 4 \sin 1^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ \Rightarrow \sin 1^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ = \frac{1}{8}$$

در رابطه ی (I) قرار می دهیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{32}$$

ادامه این مقاله را در شماره ی ۴۹

مجله ملاحظه خواهید کرد.

$$= 4 \sin a \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 a - \frac{1}{4} \sin^2 a \right]$$

$$= 3 \sin a - 3 \sin^3 a - \sin^3 a$$

بنابر مسأله ی ۱۶:

$$= 3 \sin a - 4 \sin^3 a = \sin 3a$$

مسأله ی ۱۸. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\sin 1^\circ \sin 3^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ \sin 9^\circ = \frac{1}{16}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin 1^\circ \left(\frac{1}{4} \right) \sin 5^\circ \sin 7^\circ (1)$$

معماهای فکری و منطقی



در شهر پاریس، طی تابستان، مغازه ی کفش فروشی هر دوشنبه، مغازه ی ابزارفروشی هر سه شنبه، و مغازه ی سبزی فروشی هر پنجشنبه بسته است، و بانک تنهاروزه های دوشنبه، چهارشنبه و جمعه باز است. یکشنبه ها هم تمام این مکان ها تعطیل هستند.

یک روز بعد از ظهر، خانم A، خانم B، خانم C و خانم D با هم به خرید رفتند، در حالی که هر یک باید به مکانی متفاوت مراجعه می کردند. در بازگشتشان این صحبت ها بینشان رد و بدل شد:

خانم A: من و خانم D می خواستیم این هفته زودتر به خرید برویم، اما موقعیتی که هر دو بتوانیم کارمان را رها کنیم، پیش نیامد.

خانم B: نمی خواستم امروز بیایم، اما نمی توانستم فردا کاری را که باید انجام بگیرد، انجام بدهم.

خانم C: می توانستم دیروز و پریروز هم مثل امروز اقدام کنم.

خانم D: دیروز یا فردا مناسب کارم بود.

هر یک از این خانم ها نیاز به رفتن به کدام مکان داشته است؟

پایان

این مجله را می توانید از مراکز توزیع و نمایندگی های مجله در سراسر کشور تهیه کنید. برای اطلاعات بیشتر به وبسایت www.majle.com مراجعه کنید.