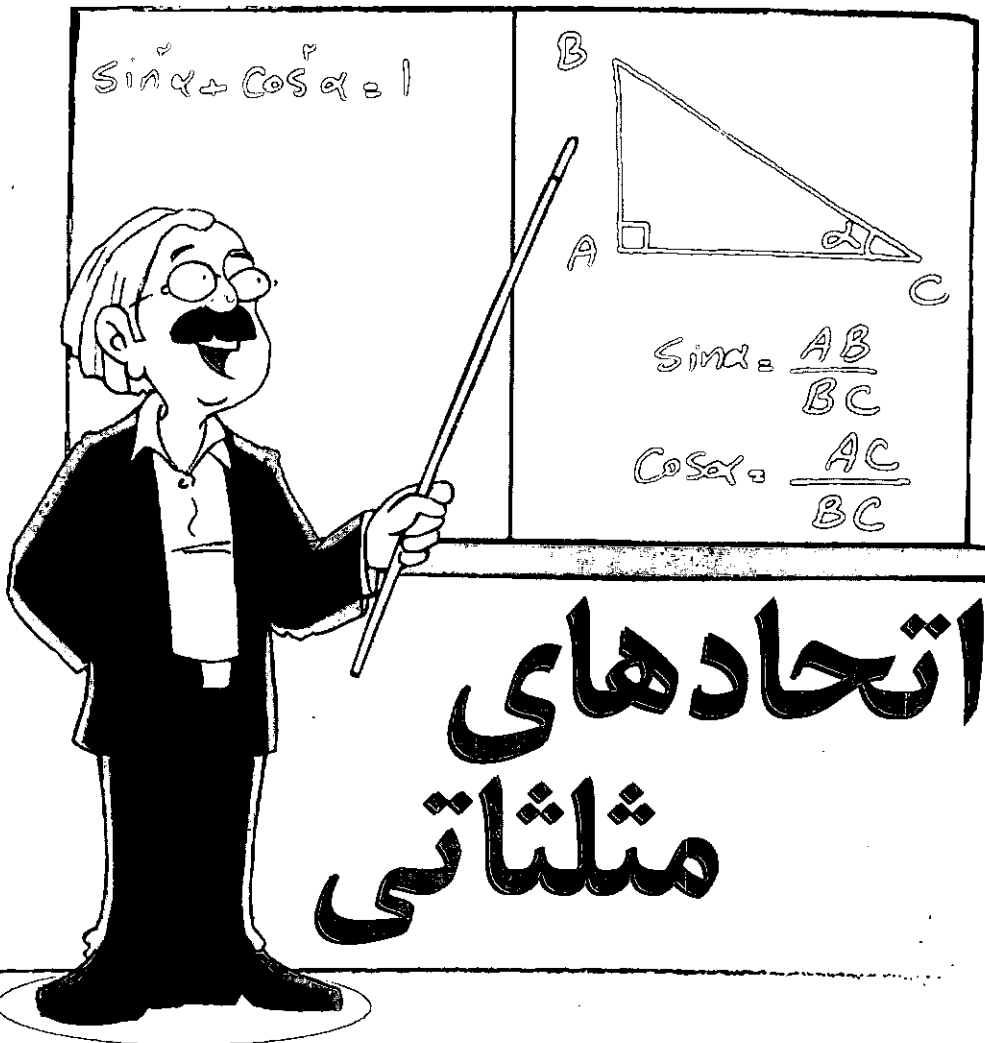




مثال ۱. درستی اتحاد $\frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A}{\cot B}$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سمت چپ این اتحاد را ساده می کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم.

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A \cdot \tan B}}$$

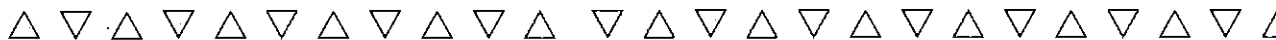
$$\text{عبارت سمت چپ} = \tan A \cdot \tan B = \tan A \times \frac{1}{\cot B} = \frac{\tan A}{\cot B}$$

برابر عبارت سمت راست

تعریف: هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می شود. برای مثال، تساوی (I) $\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1$ یک اتحاد مثلثاتی است. اگر به جای X، هر زاویه ای را قرار دهیم، تساوی فوق برقرار است.

اثبات یک اتحاد مثلثاتی معمولاً به سه روش صورت می گیرد:

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که عبارت مفصل تری است، با استفاده از فرمول های مثلثاتی و رابطه های دیگر مثلثاتی، آن قدر ساده تر می کنیم و تغییر می دهیم تا به طرف دیگر برسیم.



تفکیک می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

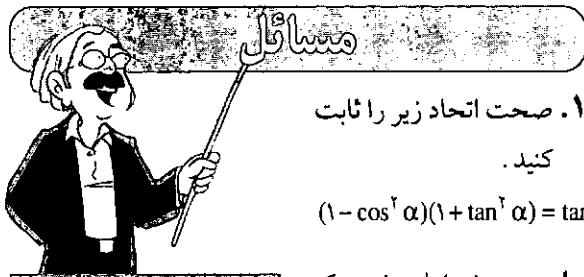
$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} + \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ (1 - \cos x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$



توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که با این روش، راحت تر حل می شوند.



۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha$$

حل: به روش اول حل می کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha)(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = (\sin^2 \alpha)(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}) = \sin^2 \alpha(\frac{1}{\cos^2 \alpha})$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$



$$۲. \text{ صحت اتحاد } (\cot \alpha - 1)^2 + (\cot \alpha + 1)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \text{ را}$$

ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \cot^2 \alpha + 1 - 2 \cot \alpha + \cot^2 \alpha + 1 + 2 \cot \alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 2 \cot^2 \alpha + 2 = 2(\cot^2 \alpha + 1) = 2(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1)$$

$$= 2(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 2(\frac{1}{\sin^2 \alpha}) = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$



روش دوم: فرض می کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول ها و روابط مثلثاتی به صورت ساده تر می نویسیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

$$\text{مثال ۲. درستی اتحاد } \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a + \cos a} = \frac{2 - \sin 2a}{2} \text{ را}$$

ثابت کنید.

حل: فرض می کنیم تساوی این اتحاد درست باشد. برای حل به روش دوم، طرفین وسطین می کنیم:

$$\Rightarrow 2(\sin^2 a + \cos^2 a) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحاد زیر بسط می دهیم:

$$x^2 + y^2 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a + \cos a)(\sin^2 a + \cos^2 a - \sin a \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a + \cos a)(1 - \frac{1}{2} \sin 2a) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$

$$\Rightarrow (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a) = (\sin a + \cos a)(2 - \sin 2a)$$



روش سوم: با نوشتن روابطی و با استفاده از فرمول ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می سازیم (این روش در واقع برگشت پذیری روش دوم است).

$$\text{مثال ۳. درستی اتحاد } \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$2 \sin x = 2 \sin x$$

دو طرف تساوی را بر $(1 - \cos x) \neq 0$ تقسیم می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$



۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\begin{aligned} \sin 200^\circ &= \sin(180^\circ + 20^\circ) = \sin(\pi + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \sin 310^\circ &= \sin(360^\circ - 50^\circ) = \sin(2\pi - 50^\circ) = -\sin 50^\circ \\ \cos 340^\circ &= \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos(2\pi - 20^\circ) = \cos 20^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= (-\sin 20^\circ)(-\sin 50^\circ) + \cos 20^\circ \cos 50^\circ \\ &= \cos 20^\circ \cos 50^\circ + \sin 20^\circ \sin 50^\circ \\ &= \cos(50^\circ - 20^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



۸. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(180^\circ - 60^\circ + \alpha) + \cos(180^\circ + 60^\circ + \alpha) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha + \cos(\pi + (\alpha - 60^\circ)) + \cos(\pi + (\alpha + 60^\circ)) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - \cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - (\cos \alpha \cos 60^\circ + \sin \alpha \sin 60^\circ) - \\ &\quad (\cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ) \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ - \\ &\quad \cos \alpha \cos 60^\circ + \sin \alpha \sin 60^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cos 60^\circ = \cos \alpha - 2 \cos \alpha \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \cos \alpha - \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$



۹. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$$

حل: داریم:

۳. صحت اتحاد $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\overbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}^1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \tan \alpha - \cot \alpha \end{aligned}$$



۴. درستی اتحاد $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2(45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha$ را ثابت کنید.

حل: $45^\circ - \alpha = x$ فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ &= \sin 2\alpha \end{aligned}$$



۵. درستی اتحاد $\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$ را ثابت کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \sin 15^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos 15^\circ \\ \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin 15^\circ \cos 30^\circ + \cos 15^\circ \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{\sin(15^\circ + 30^\circ)}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ} \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$



حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta (1 + \sin \theta) + \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \sin^3 \theta + \sin^2 \theta - \sin^3 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \tan^2 \theta \end{aligned}$$



۱۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 - \tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \alpha$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) - 1 - \tan^2 \alpha = (1 + \tan^2 \alpha) - 1 - \tan^2 \alpha \\ \text{عبارت سمت چپ} &= 1 + \tan^2 \alpha + 2 \tan^2 \alpha - 1 - \tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \alpha \end{aligned}$$



۱۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 -$$

$$2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= (1)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1 - 2\left(\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \quad \text{به خاطر بسپارید:}$$



۱۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

حل:

توجه داریم:

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2 b^2) \\ a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2]$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سمت چپ} &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times \\ &\quad [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \end{aligned}$$

$$= 1 \left[1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \right] = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \quad \text{به خاطر بسپارید:}$$



۱۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \tan^2 \theta$$

سوالات چهارگزینه‌ای



۱. اگر $x < \pi$ باشد، آن گاه به ازای چه مقادیری از m ، معادله $y \tan \frac{x}{2} = 4 - m^2$ جواب دارد؟

$$m < -2 \text{ یا } m > 2 \quad (1) \quad -2 < m < 2 \quad (2) \quad -4 < m < 4 \quad (3) \quad m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (4)$$

۲. حاصل $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} + \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$ برابر است با:

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

۳. حاصل $\tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 60^\circ$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{3} (1) & 1 (2) & \frac{\sqrt{3}}{3} (3) \\ -1 (4) \end{array}$$

۴. حاصل $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} 4 (1) & -4 (2) & -\frac{1}{4} (3) \\ \frac{1}{4} (4) \end{array}$$

۵. حاصل $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \sin 40^\circ (1) & -\sin 50^\circ (2) & -\sin 80^\circ (3) \\ -\sin 70^\circ (4) \end{array}$$

۶. حاصل $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{8} (1) & -\frac{5}{8} (2) & \frac{3}{4} (3) \\ \frac{5}{8} (4) \end{array}$$

۷. حاصل $\sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \frac{11}{16} (1) & \frac{12}{16} (2) & \frac{13}{16} (3) \\ \frac{14}{16} (4) \end{array}$$

۸. اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، آنگاه حاصل $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \tan x (1) & \cot x (2) & -\tan x (3) \\ -\cot x (4) \end{array}$$

۹. حاصل عبارت $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 15^\circ$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{6} (1) & \frac{\sqrt{6}}{2} (2) & \frac{\sqrt{6}}{3} (3) \\ \frac{\sqrt{6}}{4} (4) \end{array}$$

۱۰. حاصل کسر $\frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cos x}{\sin 2x}$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{ccc} \sin \frac{x}{2} (1) & \cos \frac{x}{2} (2) & \sin \frac{x}{4} (3) \\ \cos \frac{x}{4} (4) \end{array}$$

۱۱. حاصل $\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \cos 2x (1) & \sin 2x (2) & -\sin 2x (3) \\ -\cos 2x (4) \end{array}$$

۱۲. حاصل $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5}$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} (1) & -\frac{1}{4} (2) & \frac{1}{2} (3) \\ -\frac{1}{2} (4) \end{array}$$

۱۳. اگر $\cot \alpha$ و $\cot \beta$ ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، آنگاه $\tan(\alpha + \beta)$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} (1) & -\frac{2}{3} (2) & \frac{2}{3} (3) \\ \frac{2}{3} (4) \end{array}$$

۱۴. حاصل کسر $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ برابر است با: ($\alpha \neq k\pi$)

$$\begin{array}{ccc} \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1) & \cos^2 \frac{\alpha}{2} (2) & \tan^2 \frac{\alpha}{2} (3) \\ \cot^2 \frac{\alpha}{2} (4) \end{array}$$

۱۵. حاصل $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ$ برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} \cos 40^\circ (1) & -\cos 40^\circ (2) & -\cos 70^\circ (3) \\ -\sin 70^\circ (4) \end{array}$$

حل سؤالات چهارگزینه‌ای

۲. گزینه‌ی ۳:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} + \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 15^\circ} + \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan(45^\circ - 15^\circ) + \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۱. گزینه‌ی ۲:

$$\begin{aligned} 0 < x < \pi &\Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} > 0 \\ \tan \frac{x}{2} &= \frac{4 - m^2}{2} \Rightarrow \frac{4 - m^2}{2} > 0 \Rightarrow 4 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4 \\ &\Rightarrow -2 < m < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin 15^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos 15^\circ \\
 &= \frac{\sin 15^\circ \cos 30^\circ + \cos 15^\circ \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin(30^\circ + 15^\circ)}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{2(\sin x) \cos x} = \frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{2(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) \cos x} : 10. \text{ گزینه ی ۳}$$

$$= \frac{\Lambda \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{\Lambda \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

۱۱. گزینه ی ۲؛ داریم: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ پس:

$$\begin{aligned}
 \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2})}{2} - \frac{1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2} \\
 &= \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{2} - \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)}{2} \\
 &= \frac{1 + \sin 2x}{2} - \frac{1 - \sin 2x}{2} = \frac{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x}{2} \\
 &= \frac{2 \sin 2x}{2} = \sin 2x
 \end{aligned}$$

۱۲. گزینه ی ۲

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} &= \cos \frac{\pi}{5} \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \\
 -\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} &\times \frac{4 \sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-2(\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}) \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} \\
 &= \frac{-2(\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5})}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin \frac{4\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin(\pi - \frac{\pi}{5})}{4 \sin \frac{\pi}{5}} \\
 &= \frac{-\sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-1}{4}
 \end{aligned}$$

۱۳. گزینه ی ۲: $\cot \alpha + \cot \beta = -\frac{b}{a} = 2$ و $\cot \alpha \cdot \cot \beta = \frac{c}{a} = -2$

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha \cot \beta}} = \frac{\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cot \beta}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha \cot \beta}} \\
 &= \frac{\frac{2}{-2}}{1 - \frac{1}{-2}} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

۱۴. گزینه ی ۳

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\
 &= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

۱۵. گزینه ی ۲: $\cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ = \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ$

$$= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ = -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -\cos 40^\circ$$

۳. گزینه ی ۱: $21^\circ + 39^\circ = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \tan(21^\circ + 39^\circ)$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 21^\circ + \tan 39^\circ}{1 - \tan 21^\circ \tan 39^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 21^\circ \tan 39^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 21^\circ + \tan 39^\circ + \sqrt{3} \tan 21^\circ \tan 39^\circ = \sqrt{3}$$

۴. گزینه ی ۱: $\sin 8^\circ = \sin(9^\circ - 1^\circ) = \sin(\frac{\pi}{2} - 1^\circ) = \cos 1^\circ$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 1^\circ} &= \frac{\cos 1^\circ - \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ} \\
 &= \frac{\cos 1^\circ - \tan 60^\circ \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} \\
 &= \frac{\cos 1^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} \\
 &= \frac{\cos 60^\circ \cos 1^\circ - \sin 1^\circ \sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos(60^\circ + 1^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos 7^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ \cos 6^\circ} = \frac{\cos(9^\circ - 2^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ (\frac{1}{2})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2^\circ)}{\frac{1}{4} \sin 2^\circ} \\
 &= \frac{\sin 2^\circ}{\frac{1}{4} \sin 2^\circ} = 4
 \end{aligned}$$

۵. گزینه ی ۵

$$\begin{aligned}
 \cos^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ &= \cos^2(\frac{\pi}{2} - 20^\circ) - \cos^2 20^\circ \\
 &= \sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ \\
 &= -(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) = -(\cos 40^\circ) \\
 &= -\cos(\frac{\pi}{2} - 50^\circ) = -\sin 50^\circ
 \end{aligned}$$

۶. گزینه ی ۱: در مسئله ی ۹ درس همین مقاله داشتیم:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\
 \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

۷. گزینه ی ۳: در مسئله ی ۱۰ درس همین مقاله داشتیم:

$$\begin{aligned}
 \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \\
 \Rightarrow \sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12} &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4} (\frac{1}{2})^2 \\
 &= 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}
 \end{aligned}$$

۸. گزینه ی ۳: $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow |\tan x| = -\tan x$$

۹. گزینه ی ۳: $\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 15^\circ = \sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cdot \cos 15^\circ$