

اتحادهای جبری

برای دانش آموزان سال اول



● میر شهرام صدر

به همین ترتیب، اگر به جای a و b اعداد حقیقی دلخواه دیگری را جایگزین کنیم، حاصل دو عبارت برابر خواهد شد. در این حالت، برابری دو عبارت جبری $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را یک اتحاد گوییم.

برابریهای زیر اتحاد هستند:

$$3x+1=x+1+2x, x(x-1)=x^2-x, 3x-x=2x$$

آشنایی با اتحادهای جبری و به خاطر سپردن آنها، در محاسبه‌های ریاضی، سرعت بیشتری به ما می‌دهد. در زیر، اتحادهای مهم را بیان و اثبات می‌کنیم.

اتحادهای مهم جبری

(۱) مربع دو جمله‌ای

الف) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$(دومی + دومی)^2 = (اولی)^2 + 2(اولی)(دومی) + (دومی)^2$$

مفهوم اتحاد (برابری همیشه برقرار)

اتحاد بین دو عبارت جبری^۱ یعنی «هم عددی یا برابری» دو عبارت جبری به ازای همه مقادیر حقیقی که جانشین متغیرهای عبارت‌های جبری می‌شوند.

برای مثال، عبارت‌های $(a+b)^2$ و $a^2 + 2ab + b^2$ را در نظر می‌گیریم، اگر $a=2$ و $b=1$ را جایگزین متغیرهای عبارت‌های فوق کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2 = (2+1)^2 = (3)^2 = 9$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (2)^2 + 2(2)(1) + (1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$

اکنون اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \frac{1}{5}$ را اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{20} + \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{0.6}{5}\right)^2 = \frac{0.36}{25}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16} + \frac{0.1}{10} + \frac{0.1}{25} = \frac{0.25}{100} + \frac{0.1}{10} + \frac{0.1}{25} = \frac{0.36}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{3}{4}y^2\right) + \left(\frac{3}{4}y^2\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}x^4 + \frac{12x^2y^2}{6} + \frac{9}{16}y^4 \\ &= \frac{4}{9}x^4 + 2x^2y^2 + \frac{9}{16}y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x + 5y^2z^2)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(5y^2z^2) + (5y^2z^2)^2 \\ &= 4x^2 + 20xy^2z^2 + 25y^4z^4 \\ (-2xy - x^2)^2 &= (-2xy + (-x^2))^2 \quad (5) \\ &= (-2xy)^2 + 2(-2xy)(-x^2) + (-x^2)^2 \\ &= 4x^2y^2 + 4x^3y + x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{x^2} - \frac{x^2}{3}\right)^2 \quad (6) \\ &= \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 \quad (x \neq 0) \\ &= \frac{9}{x^4} - 2 + \frac{x^4}{9} \end{aligned}$$

۲) مربع سه جمله ای

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R}) \\ (سومی + دومی + اولی)^2 &= (سومی)^2 + (دومی)^2 + (اولی)^2 \\ &\quad + 2(سومی)(دومی) + 2(سومی)(اولی) + 2(دومی)(اولی) \end{aligned}$$

اثبات اتحاد مربع سه جمله ای

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c) \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$1) (2-x^2-3x)^2 \quad 2) (a^2+2b-5)^2$$

حل:

$$(2-x^2-3x)^2 = (2)^2 + (-x^2)^2 + (-3x)^2 \quad (1)$$

$$b) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(دومی) + (دومی)(اولی) - 2(اولی)(دومی) + (اولی)^2$$

تذکر: به خاطر سپردن صورت فارسی اتحادها، می تواند در حل مسائل بهتر استفاده شود.

اثبات اتحاد مربع دو جمله ای

اثبات اتحاد «الف»

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

اثبات اتحاد «ب»

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: حاصل هریک از عبارتهای زیر را بیابید:

$$1) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad 2) (2xy - \frac{1}{4}x^2)^2$$

$$3) \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right)^2 \quad 4) (2x + 5y^2z^2)^2$$

$$5) (-2xy - x^2)^2 \quad 6) \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)^2$$

حل:

$$(دومی) + (دومی)(اولی) + 2(اولی)(دومی) + (اولی)^2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \quad (x \neq 0) \quad (1)$$

$$= x^4 + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$$

$$\left(2xy - \frac{1}{4}x^2\right)^2 = (2xy)^2 - 2(2xy)\left(\frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \quad (2)$$

$$= 4x^2y^2 - \frac{2x^3y}{2} + \frac{1}{16}x^4$$

$$= 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{16}x^4$$

۴) اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(دومی) - (اولی) = (اولی) - (دومی) + (دومی + اولی)$$

اثبات اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$

$$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

تذکر: برای پیدا کردن حاصل یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج، معمولاً حاصلضرب دو پرانتز از عبارتهای جبری را داریم، به طوری که بدون در نظر گرفتن علامتهای جملات داخل پرانتزها، جملات دو پرانتز یکسان می‌باشند. جمع جبری جمله‌هایی که علامتهای آنها در دو پرانتز یکسان می‌باشند، «اولی» و جمع جبری جمله‌هایی که در دو پرانتز علامتهای قرینه دارند، «دومی» در نظر می‌گیریم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$۱) (\Delta t^2 - a)(a + \Delta t^2)$$

$$۲) (2a - 3c + b)(2a - b + 3c)$$

$$۳) (a - b - c)(a + b - c)$$

$$۴) (x^2 - x + 1 - x^2)(x^2 - x - 1 + x^2)$$

حل:

$$(\Delta t^2 - a)(a + \Delta t^2) = (\Delta t^2)^2 - (a)^2 = 2\Delta t^4 - a^2 \quad (۱)$$

$$(2a - 3c + b)(2a - b + 3c) = (2a)^2 - (-3c + b)^2 \quad (۲)$$

$$= 4a^2 - (b - 3c)^2$$

$$= 4a^2 - (b^2 - 6bc + 9c^2)$$

$$= 4a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$$

$$(a - b - c)(a + b - c) = (a - c)^2 - (b)^2 \quad (۳)$$

$$= a^2 - 2ac + c^2 - b^2$$

$$(x^2 - x + 1 - x^2)(x^2 - x - 1 + x^2) \quad (۴)$$

$$= (x^2 - x + 1 - x^2)(x^2 - x - (1 - x^2))$$

$$= (x^2 - x)^2 - (1 - x^2)^2$$

$$= (x^2)^2 - 2x^2 \times x + x^2 - (1 - 2x^2 + (x^2)^2)$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 + 2x^2 - x^4$$

$$+ 2(2)(-x^2) + 2(2)(-3x) + 2(-x^2)(-3x)$$

$$= 4 + x^4 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 6x^3$$

$$= 4 + x^4 + 5x^2 - 12x + 6x^3$$

$$(a^2 + 2b - 5)^2 = (a^2)^2 + (2b)^2 + (-5)^2 \quad (۲)$$

$$+ 2(a^2)(2b) + 2(a^2)(-5) + 2(2b)(-5)$$

$$= a^4 + 4b^2 + 25 + 4a^2b - 10a^2 - 20b$$

۳) مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(دومی) (اولی) + 3(اولی) (دومی) + 3(اولی) (دومی) + (دومی) (اولی)$$

$$+ 3(اولی) (دومی) + (دومی) (اولی)$$

$$(b) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(دومی) (اولی) - 3(اولی) (دومی) + 3(اولی) (دومی) - (دومی) (اولی)$$

$$+ 3(اولی) (دومی) - (دومی) (اولی)$$

اثبات اتحاد مکعب دو جمله‌ای

در این جا کافی است یکی از این دو اتحاد را اثبات کنیم:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = a(a-b)^2 - b(a-b)^2$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. ($x \neq 0$)

$$۱) (x^y - y^x)^2 \quad ۲) (x - \frac{1}{x})^2$$

حل:

$$(x^y - y^x)^2 = (x^y)^2 - 2(x^y)(y^x) + (y^x)^2 \quad (۱)$$

$$+ 2(x^y)(y^x) - (y^x)^2$$

$$= x^{2y} - 2x^y y^x + 2x^y y^x - y^{2x}$$

$$(x - \frac{1}{x})^2 = (x)^2 - 2(x)(\frac{1}{x}) + 2(x)(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x})^2 \quad (۲)$$

$$= x^2 - \frac{2x^2}{x} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = x^2 - 2x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{ب) } (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} & ((\text{دومی}) + (\text{اولی})) - ((\text{دومی}) - (\text{اولی})) \\ &= (\text{دومی})^2 - (\text{اولی})^2 \end{aligned}$$

اثبات اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله‌ای

کافی است یکی از این دو اتحاد را ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} & (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

$$۱) (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$۲) (x^2+5y)(x^2-5x^2y+25y^2)$$

$$۳) (2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$$

حل:

$$(x+2)(x^2-2x+4) = (x)^3 + (2)^3 = x^3 + 8 \quad (۱)$$

$$(x^2+5y)(x^2-5x^2y+25y^2) \quad (۲)$$

$$= (x^2)^3 + (5y)^3 = x^6 + 125y^3$$

$$(2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4) \quad (۳)$$

$$= (4x^2-9y^2)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$$

$$= (4x^2)^3 - (9y^2)^3$$

$$= 64x^6 - 729y^6$$

نتایج اتحادها (اتحادهای دیگر)

در زیر، چند نتیجه مهم از اتحادها ارائه شده است که به کمک آنها می‌توان سرعت بیشتری به عملیات جبری بخشید:

$$۱) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$۲) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab$$

$$۳) (a+b)^3 - (a-b)^3 = 4ab$$

$$۴) (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$$

$$= 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$= x^3 + x^3 - 1 - x^6$$

۵) اتحاد یک جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اثبات اتحاد یک جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$۱) (x+5)(x-2) \quad ۳) (5a-3b^2)(5a+3b^2)$$

$$۲) (x^2y+2ay)(2ay-b) \quad ۴) (a+b-2c)(a+b+c)$$

حل:

$$(x+5)(x-2) = x^2 + (5-2)x + 5 \times (-2) \quad (۱)$$

$$= x^2 + 3x - 10$$

$$(2ay+x^2y)(2ay-b) \quad (۲)$$

$$= (2ay)^2 + (x^2y-b)2ay + x^2y(-b)$$

$$= 4a^2y^2 + 2ax^2y^2 - 2aby - bx^2y$$

$$(5a-3b^2)(5a+3b^2) \quad (۳)$$

$$= (5a)^2 + (-3b^2+3b^2)5a + (-3b^2)(3b^2)$$

$$= 25a^2 - 15ab^2 + 15ab^2 - 9b^4$$

$$(a+b-2c)(a+b+c) \quad (۴)$$

$$= (a+b)^2 + (-2c+c)(a+b) + (-2c)(c)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - c(a+b) - 2c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc - 2c^2$$

۶) مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله‌ای

$$\text{الف) } (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$((\text{دومی}) + (\text{اولی})) - ((\text{دومی}) - (\text{اولی}))$$

$$= (\text{دومی})^2 + (\text{اولی})^2$$

$$\text{طرف دوم} = 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$= [(3a+3b)(a+c)](b+c)$$

$$= [3a(a+c)+3b(a+c)](b+c)$$

$$= (3a^2+3ac+3ab+3bc)(b+c)$$

$$= 3a^2b+3a^2c+3abc+3ac^2+3ab^2$$

$$+3abc+3b^2c+3bc^2$$

$$= 3a^2b+3a^2c+6abc+3ac^2+3ab^2+3b^2c+3bc^2$$

اثبات اتحاد ۵:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2$$

$$\text{طرف اول} = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$= a^2(x^2+y^2) + b^2(x^2+y^2)$$

$$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$$

$$\text{طرف دوم} = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2$$

$$= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + a^2y^2$$

کاربرد اتحادها

از اتحادها برای حاصلضرب عددها و به توان رساندن آنها می‌توان استفاده کرد. برای نمونه:

نمونه ۱:

$$101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 3 \times 100^2 \times 1$$

$$+ 3 \times 100 \times 1^2 + 1^3$$

$$= 1000000 + 300000 + 300 + 1$$

$$= 1003001$$

نمونه ۲:

$$250^2 - 150^2 = (250-150)(250+150)$$

$$= 100 \times 400 = 40000$$

نمونه ۳:

$$87 \times 93 = (90-3)(90+3)$$

$$5) (a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2$$

$$6) a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$$

$$7) a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2(a + \frac{1}{a}) \quad (a \neq 0)$$

$$8) a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - ac - bc)$$

$$9) \text{ اگر } \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 3abc$$

بعضی از اتحادهای بالا را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به عنوان تمرین، برعهده دانش آموزان عزیز واگذار می‌کنیم.

اثبات اتحاد ۳:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= 4ab$$

اثبات اتحاد ۴:

$$(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$= 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$\text{طرف اول} = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$= [(a+b)+c]^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + 2(a+b)c^2$$

$$+ c^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2 + 2c(a^2+2ab+b^2)$$

$$+ 2ac^2 + 2bc^2 + c^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2 + 2a^2c + 6abc + 2b^2c$$

$$+ 2ac^2 + 2bc^2 + c^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= 2a^2b + 2ab^2 + 2a^2c + 6abc + 2b^2c + 2ac^2 + 2bc^2$$

$$x=5: (5+1)^2 = 5^2 + 2 \times 5 + 1^2$$

$$6^2 = 25 + 10 + 1$$

$$36 = 36$$

با توجه به مطالب اخیر، درمی یابیم که معادله فقط به ازای بعضی از مقادیری که جایگزین مجهول می شود، به یک برابری درست تبدیل می شود؛ اما در اتحادها هر مقداری را که جایگزین متغیرهایش کنیم، به یک برابری درست تبدیل می شود.

تذکر بسیار مهم: عبارتهایی مانند: $a^2 - 2ab + b^2$ یا $a^2 - b^2$

یا $(a+b)^2$ اتحاد نیستند؛ بلکه عبارتهای جبری هستند.

برابریهای جبری به صورتهای زیر را یک اتحاد گوئیم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$x(x+1) = x^2 + x$$

در زیر، چند مسأله برای تکمیل شدن بحث می آوریم.

مسأله ۱. به جای نقطه چین جمله هایی قرار دهید تا برابریهای

زیر برقرار باشند:

$$۱) (\dots + 3b^2)^2 = 4a^2 + \dots + 9b^2$$

$$۲) (x^2 - 2y)(x^2 + \dots + 4y^2) = \dots - 8y^2$$

$$۳) (\dots - \dots)^2 = 36x^2y^2 - 12xy + \dots$$

حل: ۱) چون در پرانتز $(\dots + 3b^2)^2$ دو جمله قرار می گیرد و توان پرانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اول می توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد:

$$(\dots + 3b^2)^2 = 4a^2 + \dots + 9b^2$$

$$(2a + 3b^2)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b^2) + 9b^4$$

$$(2a + 3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$$

۲) به کمک اتحاد تفاضل مکعبات:

$$(x^2 - 2y)((x^2)^2 + \dots + (2y)^2) = \dots - (2y)^3$$

$$(x^2 - 2y)((x^2)^2 + (x^2)(2y) + (2y)^2) = (x^2)^3 - (2y)^3$$

$$(x^2 - 2y)(x^4 + 2x^2y + 4y^2) = x^6 - 8y^3$$

۳) چون در پرانتز $(\dots - \dots)^2$ دو جمله قرار می گیرد و توان

$$= 90^2 - 3^2 = 8100 - 9 = 8091$$

نمونه ۴:

$$1021^2 = (1000 + 20 + 1)^2$$

$$= 1000^2 + 20^2 + 1^2 + 2 \times 1000 \times 20$$

$$+ 2 \times 1000 \times 1 + 2 \times 20 \times 1$$

$$= 1000000 + 400 + 1 + 40000 + 2000 + 40$$

$$= 1042441$$

نمونه ۵:

$$259^3 - 250^3 - 9^3 = (250 + 9)^3 - 250^3 - 9^3$$

$$= 250^3 + 3 \times 250^2 \times 9 + 3 \times 250 \times 9^2 + 9^3 - 250^3 - 9^3$$

$$= 3 \times 250^2 \times 9 + 3 \times 250 \times 9^2$$

$$= 3 \times 250 \times 9(250 + 9)$$

$$= 1748250$$

تفاوت بین اتحاد و معادله

همان طور که می دانید، هدف از حل معادله ای مانند:

$$x + 2 = 0$$

به دست آوردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند. با کمی دقت، درمی یابیم که جواب معادله فوق ۲- است (۲- ریشه معادله است).

برای این که رابطه بالا برقرار باشد، فقط به جای x می توانیم

عدد ۲- را قرار دهیم، پس:

$$-2 + 2 = 0$$

بنابراین معادله، یک رابطه جبری است که فقط به ازای ریشه هایش (جوابهایش) به یک برابری عددی درست تبدیل می شود. اگر در معادله بالا به جای x عدد ۲ یا ۳ یا هر عدد دیگری به غیر از ۲- را قرار دهیم، در معادله صدق نخواهد کرد و به یک برابری درست عددی نخواهیم رسید.

اکنون اتحاد $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ را در نظر می گیریم. اگر

به جای x هر عدد دلخواهی را قرار دهیم، در اتحاد صدق می کند؛

به طور مثال اگر به جای x عدد ۲ یا ۵ را قرار دهیم:

$$x=2: (2+1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1^2$$

$$3^2 = 4 + 4 + 1 \quad \& \quad 9 = 9$$

برانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اول می توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد :

$$p = \frac{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2a} + \sqrt[3]{a^2a} + \sqrt[3]{a^2a}}{\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{3a}{a} = 3 \quad (a \neq 0)$$

مسئله ۴. هرگاه $a^2 + b^2 = 4ab$ ، حاصل عبارت $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$

را محاسبه کنید.

حل: اگر به دوطرف برابری $a^2 + b^2 = 4ab$ ، عبارت $2ab$ را اضافه کنیم؛ خواهیم داشت:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + 4ab$$

$$(a+b)^2 = 6ab \quad (\text{با توجه به اتحاد اول})$$

دوطرف رابطه بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$(a+b)^4 = (6ab)^2 \quad (1)$$

اگر به دوطرف برابری $a^2 + b^2 = 4ab$ عبارت $-2ab$ را اضافه کنیم:

$$a^2 + b^2 - 2ab = -2ab + 4ab$$

$$(a-b)^2 = 2ab$$

دوطرف رابطه بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$(a-b)^4 = (2ab)^2 \quad (2)$$

با جایگزین کردن (۱) و (۲) در عبارت زیر خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 = \frac{(a-b)^4}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(2ab)^2}{(6ab)^2} = \left(\frac{2ab}{6ab}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad (ab \neq 0)$$

مسئله ۵. اگر $x + \frac{1}{x} = -1$ ، عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

ب) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

حل:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

الف)

برانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اول می توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد :

$$(6xy - \dots)^2 = (6xy)^2 - 12xy + \dots$$

می دانیم که جمله دوم عبارت سمت راست برابری، بنابر اتحاد اول به صورت زیر است:

$$2 \times (\text{اولی}) = 12xy$$

$$2 \times (6xy) \times (\text{دومی}) = 12xy \Rightarrow \text{دومی} = 1$$

$$(6xy - 1)^2 = (6xy)^2 - 12xy + 1^2$$

در نتیجه:

مسئله ۲. اگر $x + y = \sqrt{5}$ و $xy = 1$ حاصل عبارت

$$x^2 + y^2 \text{ و } x^2 + y^2 \text{ را بیابید.}$$

حل: با توجه به نتایج اتحادها خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$x^3 + y^3 = (\sqrt{5})^3 - 3(1)(\sqrt{5})$$

$$= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

مسئله ۳. اگر $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ، آنگاه

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$p = \frac{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

حل: ابتدا دو طرف فرض را در عدد ۲ ضرب می کنیم، سپس از اتحاد اول استفاده می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

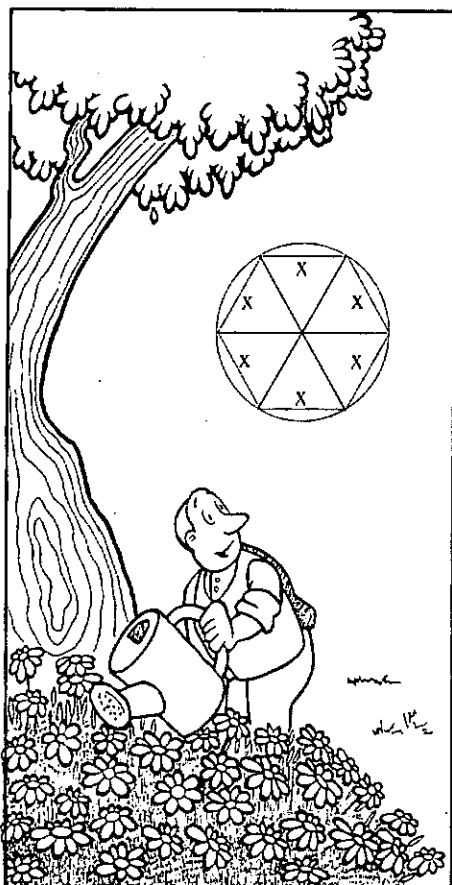
$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

حاصل جمع چند مقدار نامنفی، وقتی برابر با صفر است که داشته باشیم:

$$\left. \begin{aligned} (a-b)^2 = 0 &\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \\ (a-c)^2 = 0 &\Rightarrow a-c=0 \Rightarrow a=c \\ (b-c)^2 = 0 &\Rightarrow b-c=0 \Rightarrow b=c \end{aligned} \right\} \Rightarrow a=b=c \quad (1)$$

حال برای به دست آوردن حاصل عبارت، با توجه به نتیجه (۱)



باغبانی باغچه دایره شکلی با چمن شش ضلعی منتظم محاط در آن دارد. چمن مورد بحث از $\sqrt{108}$ متر مربع سبزه تشکیل شده است. قطر باغچه چه قدر است؟

جواب در صفحه ۸۸

$$x^2 + \frac{1}{x} = (-1)^2 - 2 = -1$$

$$x^2 + \frac{1}{x} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) \quad (ب)$$

$$x^2 + \frac{1}{x} = (-1)^2 - 2(-1) = 2$$

مسئله ۶. اگر $c^2 - d^2 = 30$ و $c - d = -5$ ، عبارت $(c+d) - 11$ را محاسبه کنید.
حل: به کمک اتحاد مزدوج:

$$c^2 - d^2 = (c+d)(c-d) = 30$$

$$(c+d) \times (-5) = 30 \Rightarrow c+d = -6$$

$$(c+d) - 11 = -6 - 11 = -17 \quad \text{پس:}$$

مسئله ۷. اگر $a+b+c=0$ ، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \quad (۱) \quad \text{حل:}$$

دوطرف رابطه (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(a+b)^3 = (-c)^3$$

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = -c^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab \underbrace{(a+b)}_{-c} = 3abc$$

یادداشتها:

- ۱- اگر روی اعداد و متغیرها، چهار عمل اصلی و عمل جذرگیری و توان را اعمال کنیم، یک عبارت جبری به دست می‌آید.
- ۲- a^3 را مکعب عدد حقیقی $a \neq 0$ می‌گوییم.

