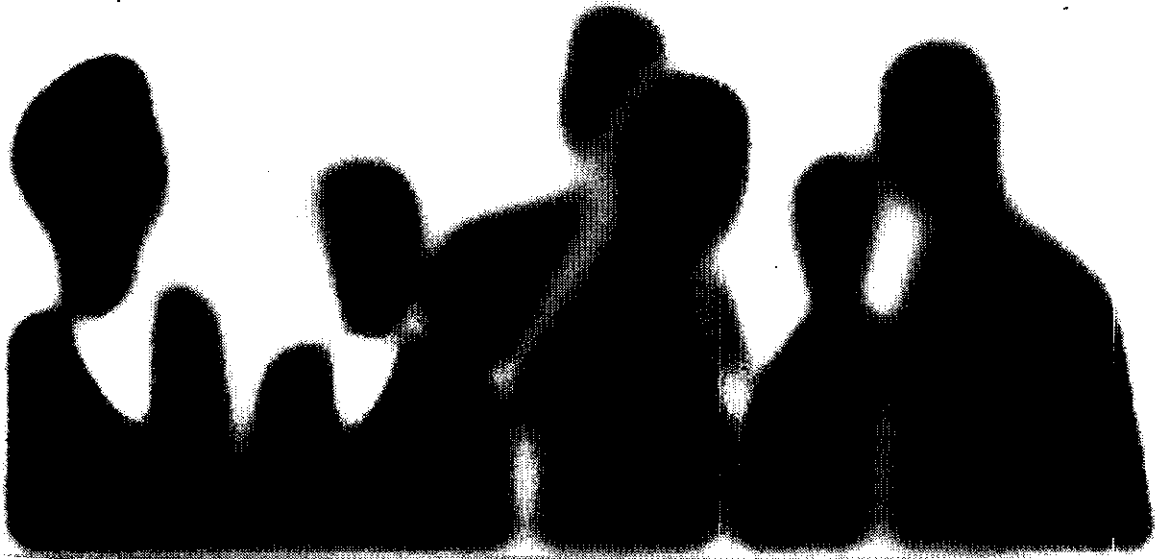
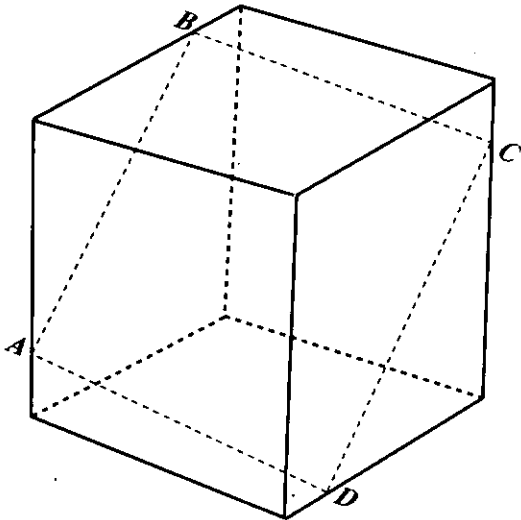




پرویز شهریاری



اتحادها و معادله‌ها



پیش از آن که به حل معادله و نامعادله بپردازیم، مسأله‌هایی را می‌آوریم و آن‌ها را حل می‌کنیم. برای حل این مسأله‌ها، هم از معادله یا دستگاه معادله‌ها استفاده کرده‌ایم و هم از نامعادله. درواقع، این مسأله‌ها باید با دقت در صورت آن‌ها و پیدا کردن رابطه‌ای که بین بخش‌های مختلف مسأله وجود دارد، حل می‌شود.

در آغاز به مسأله‌ای که به ظاهر عجیب است، توجه کنید: در زمان «آخرین برشویک سرباز» نوشته کارل چاپک، نویسنده طنزپرداز چک، دیوانه‌ای وجود دارد که مدعی است در درون کره زمین، کره دیگری وجود دارد که به مراتب از کره زمین بزرگ‌تر است.

ما در این جا ادعای دیگری می‌کنیم که به ظاهر با ادعای «کارل چاپک» چندان تفاوتی ندارد و با وجود این، ادعای درستی است: در مکعب می‌توان تونلی ایجاد کرد که بتوان مکعب بزرگ‌تری را به آن وارد کرد.

چهار ضلعی ABCD مربع است؛ زیرا دارای قطرهای و ضلع‌هایی برابر است. نقطه‌های A، B، C و D، یال‌های مکعب اصلی را به نسبت ۱:۳ تقسیم می‌کنند. اگر ضلع

مکعب اصلی را واحد بگیریم، ضلع این مربع برابر می شود با:

$$\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1.06$$

در داخل این مربع می توان مربع دیگری ساخت که طول ضلع آن کوچک تر از AB و بزرگ تر از واحد، یعنی طول ضلع مکعب اصلی، باشد. همین مربع جدید را می توان مقطع تونل مورد نظر انتخاب کرد.

اکنون به سراغ مسأله هایی می رویم که برای حل آن ها، هم به معادله نیاز داریم و هم به نامعادله.

مسأله ۱. کسری به صورت نسبت دو عدد طبیعی داریم که مخرج آن یک واحد از مجذور صورت آن کم تر است. اگر ۲ واحد به صورت و ۲ واحد به مخرج اضافه کنیم، کسری که به دست می آید، از $\frac{1}{3}$ بزرگ تر است. اگر هم از صورت و هم از مخرج ۳ واحد کم کنیم، کسر از $\frac{1}{10}$ کوچک تر می شود؛ ولی همچنان کسری مثبت باقی می ماند؛ این کسر را پیدا کنید.

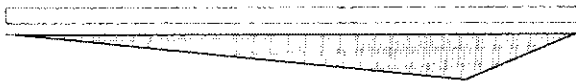
حل: با فرض مثبت بودن m ، کسر را برابر $\frac{m}{m^2-1}$ می گیریم. اگر به طور همزمان ۲ واحد به صورت مخرج اضافه کنیم، کسر حاصل از $\frac{1}{3}$ بزرگ تر می شود؛ یعنی:

$$\frac{m+2}{m^2+1} > \frac{1}{3} \Rightarrow m^2-3m-5 < 0$$

که پاسخ آن برای m عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ است. اگر از صورت و مخرج کسر اصلی ۳ واحد کم کنیم، کسری مثبت و کوچک تر از $\frac{1}{10}$ به دست می آید:

$$0 < \frac{m-3}{m^2-4} < \frac{1}{10}$$

که تنها $m=4$ (از جواب های پیش) در آن صدق می کند. بنابراین کسر مطلوب برابر $\frac{4}{15}$ است.



مسأله ۲. سربازان را می توان به ترتیبی منظم کرد که در هر ردیف ۲۴ سرباز جاذبه شود ولی معلوم شد همه سربازان حاضر نیستند. بنابراین تجدید سازمان کردند؛ به نحوی که تعداد ردیف ها ۲ واحد کم تر و تعداد سربازان هر ردیف ۲۶ نفر بیش تر از تعداد جدید ردیف ها بود. مطلوب است تعداد سربازان؛ به شرطی که اگر همه سربازان گروهان را جمع کنیم، بتوانیم آنان را طوری مرتب کنیم که تعداد سربازان هر ردیف با تعداد ردیف ها برابر باشد.

حل: اگر تعداد ردیف ها را در تنظیم اول N بگیریم، تعداد سربازان $24N$ می شود. در تجدید سازمان، ردیف ها برابر $N-2$ است. چون در هر ردیف ۲۶ نفر بیش از تعداد ردیف ها، سرباز وجود دارد، تعداد سربازان هر ردیف $N+24$ می شود. معادله را چه طور باید تشکیل داد؟ آیا مسأله تنها یک جواب دارد؟

از جای روشنی آغاز می کنیم. در حالت دوم، یعنی ضمن تجدید سازمان، تعداد سربازان کم تر است؛ یعنی:

$$24N > (N-2)(N+24)$$

نامعادله را ساده و منظم می کنیم:

$$N^2-2N-48 < 0$$

جواب های این نامعادله $8 < N < 6$ است. خوب، بعد چی؟ به فرض مسأله توجه می کنیم. هنوز از تمامی فرض استفاده نکرده ایم. معلوم است که تعداد ردیف های N ، باید درست و مثبت باشد؛ یعنی جواب N در محدوده تنگ تری قرار می گیرد: $8 < N < 8$.

$$2 < N < 6$$

یعنی N می‌تواند یکی از عددهای ۳، ۴ و ۵ باشد، که تنها به ازای $N = 5$ عدد $N + 12$ ، عددی اول است. پاسخ. در حالت اول ۵ واگن انتخاب کردیم؛ چون گمان می‌کردیم ۶۰ اسب داریم.



مسئله ۴. چند گروه کارگر، لباس‌های کار خود را از انبار گرفتند؛ هر نفر دو دست. هر گروه روی هم ۲۰ دست لباس، بیش‌تر از تعداد گروه‌ها گرفت. اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر بود و هر گروه ۱۲ دست لباس می‌گرفت، به همه لباس نمی‌رسید. چند دست لباس در انبار وجود دارد؟

حل: تعداد گروه‌ها را x و تعداد کارگران هر گروه را N می‌گیریم. چون هر گروه، ۲۰ دست لباس بیش‌تر از تعداد گروه‌ها لباس گرفته است و به هر کارگر هم ۲ دست لباس رسیده است، پس: $2N = x + 20$

اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر، یعنی $x + 4$ بود و هر گروه هم ۱۲ دست لباس می‌گرفت، روی هم:

$$12(x + 4)$$

تعداد دست لباس می‌شد که مسئله گفته است به همه نمی‌رسید؛ یعنی از $2Nx$ بیش‌تر می‌شد؛ بنابراین:

$$12(x + 4) > 2Nx$$

به جای $2N$ مقدارش $x + 20$ را می‌گذاریم، به دست می‌آید:

$$12(x + 4) > (x + 20)x$$

که از مرتب کردن آن به این نامعادله می‌رسیم:

$$x^2 + 8x - 48 < 0$$

سمت چپ این نامعادله تجزیه می‌شود و بنابراین جواب نامعادله به دست می‌آید:

$$(x + 12)(x - 4) < 0$$

که با توجه به مثبت بودن مقدار x به این جواب می‌رسیم:

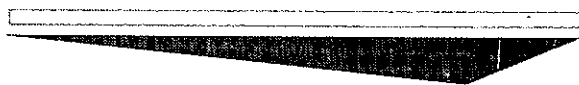
$$0 < x < 4$$

پس N می‌تواند یکی از هفت عدد ۱ تا ۷ باشد.

اکنون اگر شرط آخر را درباره تعداد سربازان گروهان در نظر بگیریم (تعداد سربازان هر ردیف برابر است با تعداد ردیف‌ها)، به این نتیجه می‌رسیم که تعداد کل سربازان، یعنی $24N$ باید مجذور کامل باشد.

اگر N را به ترتیب برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ بگیریم، روشن می‌شود که شرط اخیر تنها برای $N = 6$ برقرار است که در این صورت، تعداد سربازان ۱۴۴ می‌شود.

به این ترتیب، بدون این که معادله‌ای تشکیل داده باشیم، توانستیم تنها جواب آن را پیدا کنیم.



مسئله ۳. برای جابه‌جایی اسب‌ها از چند واگن استفاده کرده‌ایم و در هر واگن ۱۲ اسب جا دادیم. ولی وقتی معلوم شد باید تعداد کم‌تری اسب جابه‌جا شود، ۲ واگن را کنار گذاشتیم و در بقیه واگن‌ها آن‌ها را جا دادیم. تعداد اسب‌ها در هر واگن عددی اول و به اندازه ۱۴ عدد بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید شد. تعداد اسب‌ها و واگن‌ها را در حالت اول پیدا کنید.

حل: از آن‌جا که در بار دوم ۲ واگن را کنار گذاشتیم، پس باید تعداد واگن‌های بار اول از ۲ بیش‌تر باشد. تعداد واگن‌ها را در بار اول، برابر N می‌گیریم: $N > 2$. بنابراین تعداد اسب‌ها در بار اول باید برابر $12N$ باشد. بار دوم ۲ واگن کم کرده‌ایم و در هر واگن ۱۴ اسب بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید قرار دادیم؛ زیرا روشن است بار اول بیش‌تر از بار دوم اسب داشته‌ایم؛ پس:

$$12N > (N - 2)[(N - 2) + 14]$$

که پس از ساده کردن به صورت نامعادله:

$$N^2 - 2N - 24 < 0$$

درمی‌آید که جواب‌های آن $2 < N < 6$ است و با توجه

به شرط $N > 2$ باید داشته باشیم:

یعنی x می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۲ و ۳ باشد. ولی پیش از این داشتیم:

$$2N = x + 20 \Rightarrow x = 2N - 20$$

x عددی زوج است: $x = 2(N - 10)$ ، یعنی $x = 2$. تعداد گروه‌ها ۲ بوده است، از آن‌جا:

$$2N = x + 20 = 22 \Rightarrow N = 11$$

و تعداد دست لباس‌ها برابر $2N \times$ ، یعنی ۴۴ می‌شود.

مسئله ۶. کاری را به یک تراشکار سفارش دادند. قرار شد ۹۰ قطعه از آن را استاد و ۳۵ قطعه را شاگرد انجام دهد. استاد ۳۰ قطعه اول را با سرعتی دو برابر شاگرد خود انجام داد؛ ولی برای تهیه ۶۰ قطعه باقی مانده، سرعت کار خود را افزایش داد و هر ساعت دو قطعه بیش‌تر تهیه کرد و کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگرد تمام کرد. ولی اگر ۳۰ قطعه اول را با همان سرعت ۶۰ قطعه تهیه می‌کرد، کارش دست‌کم نیم ساعت بعد از شاگردش تمام می‌شد. شاگرد در هر ساعت چند قطعه تهیه می‌کند؟

حل: $x > 0$ را تعداد قطعه‌هایی می‌گیریم که شاگرد در هر ساعت آماده می‌کند. استاد ۳۰ قطعه اول را با سرعتی ده برابر شاگرد خود کار می‌کند؛ یعنی آن‌ها را در $\frac{30}{2x}$ ساعت تمام می‌کند. او برای ۶۰ قطعه دیگر، هر ساعت ۲ قطعه بیش‌تر کار می‌کند؛ یعنی ۶۰ قطعه را در $\frac{60}{x+2}$ ساعت تمام می‌کند. چون کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگردش تمام می‌کند، این نابرابری را داریم:

$$\frac{30}{2x} + \frac{60}{2x+2} \geq \frac{35}{x} + 1 \quad (1)$$

ولی اگر تمام قطعه‌ها را با همان سرعت آخر تهیه می‌کرد، دست‌کم نیم ساعت بعد از شاگردش از کار فراغت می‌یافت:

$$\frac{90}{2x+2} \geq \frac{35}{x} + \frac{1}{2} \quad (2)$$

نامعادله (۱) به این صورت درمی‌آید (به یاد داشته باشیم که مخارج مشترک، یعنی $x(x+2)$ مقداری مثبت است:

$$x^2 - 9x + 20 \leq 0$$

که جواب آن در این نابرابری صدق می‌کند:

$$4 \leq x \leq 5$$

نامعادله (۲) به این صورت درمی‌آید:

$$x^2 - 19x + 70 \leq 0$$

که جواب آن چنین است:

$$5 \leq x \leq 14$$

مسئله ۵. ۹۵ تومان سکه‌های ۵ و ۱۰ تومانی داریم که تعداد آن‌ها از ۱۴ تجاوز نمی‌کند. اگر به جای سکه‌های ۵ تومانی، سکه‌های ۱۰ تومانی و به جای ۱۰ تومانی، سکه‌های ۵ تومانی در اختیار داشتیم، مبلغ مجموع سکه‌ها از $\frac{2}{3}$ مبلغ اصلی بیش‌تر می‌شد. تعداد هر کدام از سکه‌های ۵ تومانی و ۱۰ تومانی را پیدا کنید.

حل: تعداد سکه‌های ۵ تومانی را n و ۱۰ تومانی را m می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95 \\ m + n \leq 14 \\ \frac{3}{2}(10n + 5m) \leq 95 \end{cases}$$

از معادله اول به دست می‌آید:

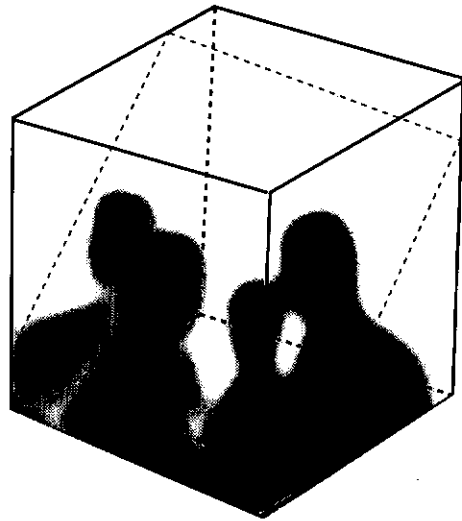
$$n = 19 - 2m$$

از نامعادله دوم، با در نظر گرفتن مقدار n به نتیجه $m \geq 5$

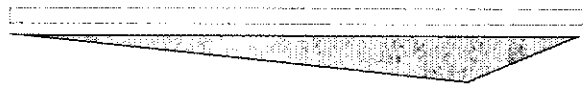
می‌رسیم و از نامعادله سوم، با همان شرط برای n ، به دست می‌آید: $\frac{9}{4} \geq m$. در ضمن m نمی‌تواند از ۹ بیش‌تر باشد؛ چرا که در این صورت مبلغ کل از ۹۵ تومان بیش‌تر می‌شود.

پاسخ: $m = 9$ و $n = 1$ (۹ سکه ۱۰ تومانی و یک سکه ۵

تومانی).



جواب مشترک این دو نامعادله $x = 5$ است.
پاسخ: شاگرد ساعتی ۵ قطعه می سازد.



مسئله ۷- الف. روی تخته سیاه این معادله نوشته شده

است:

$$ax^2 - bx + c = 0$$

دو نفر با هم بازی می کنند. اولی ۳ عدد نام می برد دومی به دلخواه خود، این عددها را به جای a ، b و c می گذارد. آیا اولی می تواند ۳ عدد نام ببرد که وقتی دومی آن ها را به جای a ، b و c گذاشت (این که چه عددی را به جای a ، چه عددی را به جای b و چه عددی را به جای c قرار دهد، به عهده دومی است؛ ولی باید از بین همان سه عددی باشد که اولی نام برده است)، معادله دارای ۲ ریشه گویا شود یا دومی می تواند در کار او اخلال ایجاد کند؟

ب. روی تخته سیاه، این معادله نوشته شده است:

$$x^2 + ax^2 + bx + c = 0$$

بازیکن اول یک عدد نام می برد و بازیکن دوم آن را هر جا که مایل باشد، به جای یکی از ضرایب های مجهول قرار می دهد. اولی عدد دیگری نام می برد و دومی آن را به جای یکی از دو حرف باقی مانده می گذارد. سرانجام اولی عددی به جای حرف سوم قرار می دهد. آیا اولی می تواند عددها را طوری انتخاب کند که معادله دارای ۳ ریشه درست باشد؟

حل: الف. می تواند. بازیکن اول وقتی برنده می شود که برای a ، b و c سه عدد متفاوت نام ببرد که مجموع آن ها برابر صفر باشد (مانند ۱، ۳- و ۲). در این صورت، یکی از ریشه های معادله برابر $x_1 = 1$ و دیگری $x_2 = \frac{c}{a}$ خواهد بود.
ب) می تواند در این جا یکی از راه هایی را که بازیکن اول می تواند انتخاب کند، می آوریم. در آغاز عدد صفر را نام می برد. اگر دومی، عدد صفر را به جای c بگذارد، آن وقت معادله به صورت:

$$x^2 + ax^2 + bx = 0$$

درمی آید. سپس اولی عدد ۲ را نام می برد و هر جا که دومی این عدد را بگذارد، اولی در جای باقی مانده، عدد ۳- را پیشنهاد می کند. معادله به یکی از این دو صورت درمی آید:

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x(x-1)(x+3) = 0$$

اگر دومی، صفر را به جای a قرار دهد، معادله چنین می شود:

$$x^2 + bx + c = 0$$

در این صورت اولی عدد $(3 \times 4 \times 5)^2$ را نام می برد. اگر دومی آن را به جای b بگذارد، اولی برای c ، عدد صفر را انتخاب می کند و اگر عددی را که اولی نام برده است، به جای c قرار دهد، اولی b را این مقدار انتخاب می کند:

$$b = 3^2 \times 4^2 - 3^2 \times 5^2 - 4^2 \times 5^2$$

در این صورت، معادله مفروض به یکی از این حالت ها بدل می شود:

$$x(x + 3 \times 4 \times 5)(x - 3 \times 4 \times 5) = 0$$

$$(x + 3^2)(x + 4^2)(x - 5^2) = 0$$

سرانجام، اگر دومی صفر را به جای b قرار دهد، معادله چنین می شود:

$$x^2 + ax^2 + c = 0$$

آن وقت، اولی عدد $6^2 \times 7^3$ را نام می برد و سپس برای a ، عدد 7^2 یا برای c ، عدد $6^8 \times 7^3$ را. در این صورت، معادله به یکی از این حالت ها تبدیل می شود:

$$(x + 2 \times 7)(x - 3 \times 7)(x - 6 \times 7) = 0$$

$$(x - 3 \times 6^2 \times 7^2)(x + 3 \times 6^2 \times 7^2)(x + 6^2 \times 7^2) = 0$$