

آیا قاعده هویتال همیشه کارآمد است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad !??$$

در شماره قبل قاعده هویتال و شرایط استفاده از این قاعده بررسی شد، همچنین با چند هشدار تذکرهای لازم را در استفاده از این قاعده بیان کردیم، اینک در ادامه مطلب:

قسمت دوم

● مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

برای دانش آموزان سال سوم و دوره پیش دانشگاهی

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد، قاعده هویتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2} = \dots$$

و پس از n مرحله کاربرد قاعده هویتال، به کسر

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{n! x^{n+1}}$$

می‌رسیم. نتیجه می‌گیریم هرگز رفع ابهام

معجون هویتال و روش‌های دیگر

در محاسبه حدود، گاه استفاده مکرر از قاعده هویتال به تنهایی کارآمد و ثمربخش نیست. درحالی‌که به کارگیری روش‌های دیگری چون «تغییر متغیر»، «جانشانی مثلثاتی» و... به همراه قاعده هویتال می‌تواند راه‌گشا باشد و ما را به سرمنزل مقصود رهنمون شود.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

نخواهد شد. درحالی که با تغییر متغیر ساده $\frac{1}{x} = t$ و یک بار کاربرد قاعده هوییتال، نتیجه مطلوب حاصل می شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

مثال ۱۲. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد، قاعده هوییتال را به کار می بریم:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow (\csc x)' = -\csc x \cot x; (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x}{\csc^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x \cdot \cot x}{\csc^2 2x \cdot \cot 2x} = \dots$$

هر کاربرد قاعده هوییتال، به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ منجر می شود درحالی که با استفاده ترکیبی از جانشانی مثلثاتی و قاعده هوییتال، حد مذکور به راحتی محاسبه می شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x}{1}}{\frac{\tan 2x}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 2x)}{1 + \tan^2 x} = 2$$

مثال ۱۳. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\infty - \infty$ را دارد و می توان آن را به صورت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x} \sqrt{\sin x}}$ نوشت و به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کرد. استفاده مکرر از قاعده هوییتال ثمربخش نیست. درحالی که گویا کردن و ضرب صورت و مخرج در عبارتی یکسان به همراه هوییتال می تواند راه گشا

باشد، توجه کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x} \sqrt{\sin x}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x} \sqrt{\sin x}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x \sqrt{\sin x} + \sqrt{x} \sin x} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x - \sin x}{x}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x}} \quad (*) \end{aligned}$$

حال از آن جا که داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 2$$

اکنون کافی است سعی کنیم حد صورت کسر (*) را بیابیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-2x^2} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه حد خارج قسمت، حد کسر (*) برابر صفر است و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0.$$

تمرین ۲. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \sin x$.

قاعده هوییتال، ملال آور و خسته کننده

در بعضی مسائل، استفاده از قاعده هوییتال میسر است، اما استفاده از آن به طور مکرر، گاه ملال آور و خسته کننده است و گاه مسأله را دشوارتر می کند. درحالی که روش های دیگر می توانند مفیدتر، مؤثرتر و ساده تر باشند و ما را سریع تر به جواب رهنمون شوند. به این نمونه ها توجه کنید:

مثال ۱۴. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} - 3 \sin x}{3x^5 + 4x^{10}}$.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را بر x^{10} تقسیم می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} - 3 \sin x}{3x^5 + 4x^{10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{3 \sin x}{x^{10}})}{\frac{3}{x^5} + 4} = \frac{1}{4}$$

درحالی که استفاده مکرر (۱۰ مرتبه) از قاعده هویتال بسیار ملال آور و خسته کننده خواهد بود.

مثال ۱۵. مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x \cdots \tan nx}{x^n}$$

حل: کسر فوق را به صورت زیر تفکیک می کنیم و از

$$\text{قضیه ۱} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1 \quad \text{سود می بریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x \cdots \tan nx}{x^n} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdots \frac{\tan nx}{nx}$$

درحالی که n بار استفاده از قاعده هویتال، هم خسته کننده است و هم در هر مرحله، کار سخت تر، دشوارتر و پیچیده تر خواهد شد.

عدم کارایی قاعده هویتال

گاه در بعضی مسائل از قاعده هویتال استفاده می کنیم، اما رفع ابهام صورت نمی گیرد. چندین بار قاعده را به کار می بریم، اما باز هم نتیجه ای حاصل نمی آید و صورت های مبهم همچنان تکرار می شوند. در مواردی نیز صورت مسئله به مسئله ای بسیار پیچیده تر بدل می شود. درحالی که با استفاده از روش های دیگری چون تغییر متغیر، جانشانی مثلثاتی، «گویا کردن»، «حذف عامل ابهام از صورت و مخرج» و... بدون هیچ نیازی به قاعده هویتال، حدود مورد نظر به سادگی و زیبایی محاسبه می شوند. به این نمونه ها توجه کنید:

مثال ۱۶. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعده هویتال را به کار می بریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \dots \end{aligned}$$

همان طور که مشاهده می شود، استفاده مکرر از قاعده هویتال سودی ندارد و دچار مشکل می شویم. درحالی که با یک فاکتورگیری ساده و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج، حد کسر فوق به سادگی محاسبه می شود. ملاحظه کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1 \end{aligned}$$

مثال ۱۷. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x}$

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعده هویتال را به کار می بریم:

یادآوری:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x; (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(10+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{10}.$$

تمرین ۳. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}$.

تمرین ۴. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$.

تمرین ۵. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{\cot x}$.

تمرین ۶. مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(\sin x)} - \frac{1}{\sin(\sin(\sin x))} \right)$$

راهنمایی: قاعده هوییتال برای محاسبه این حد کارایی ندارد. سعی کنید از روش دیگری آن را محاسبه کنید.

نتیجه گیری

ریاضیات اقیانوس بیکرانی از مسائل و حل آن هاست و اصل ها، تعریف ها، مفهوم ها، قضیه ها، برهان ها، نظریه ها، دستور ها و روش ها، همگی برای حل مسائل موجودیت یافته اند. اما آیا این قضیه ها و دستور ها همیشه و برای همه مسائل کارآمد هستند؟ آیا نباید شرایط و ضوابط حاکم بر آن ها، مورد توجه قرار گیرند؟

قاعده هوییتال، نمونه ای از این قضیه هاست که قدرت و کارایی فوق العاده و معجزه آسای در محاسبه حدود مبهم دارد و انکار آن کاری عبث و بیهوده است. اما دارای شرایط و ضوابط خاصی است که در حین استفاده، باید مورد توجه قرار گیرند و نیز باید پذیرفت که در حل برخی از مسائل، محاسبه حدود، نه تنها مفید و کارآمد نیست، بلکه باعث پیچیدگی و دشواری بیش تر مسأله می شود. درحالی که

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x \cdot \tan x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \dots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفاده مکرر از قاعده هوییتال ثمربخش نیست و دچار مشکل می شویم. درحالی که یک جانشانی مثلثاتی، محاسبه حد فوق را زیبا و ساده می کند. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

مثال ۱۸. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{x+1}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعده هوییتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{2\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \dots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفاده مکرر از قاعده هوییتال به نتیجه نمی انجامد و دچار مشکل می شویم، درحالی که فاکتورگیری و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج کسر می تواند راه گشا باشد. ملاحظه کنید:

روش ها و دستورات دیگری می توانند به سهولت و زیبایی
مسأله را حل کنند. بنابراین، در برخورد با مسائل ریاضی،
باید خود را به ابزار، قضیه ها و شیوه های گوناگونی مجهز
کنیم و با فکر و اندیشه ای باز، برای حل هر مسأله، از راه و
روش و ابزار مناسب آن سود ببریم. به امید کسب چنین
توانایی و مهارتی.

منابع

۱. تلگینی، محمود و خردپروز، فروزان و رجالی، علی و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۷۸.
۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.
۳. تمپل بل، اریک. ریاضی دانان نامی. ترجمه حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.
۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصه زندگینامه علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.
۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علی اکبر تلگینی، محمود و خردپروز، فروزان و رجالی، علی و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۷۸.
۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.
۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.
۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره ای بر آنالیز ریاضی. ترجمه بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا (ع). ۱۳۷۶.
۹. استورات، جیمز. حسابان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه محمد حسین علامت ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.
۱۰. آذرپناه، فریرز. روش های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبه حد. رشد آموزش ریاضی. شماره ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. پائیز ۱۳۷۶.
۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیپس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمه سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.
۱۲. توماس، جرج. بی و فینی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه علی اکبر عالم زاده و داریوش بهمردی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.
۱۳. بارنل، رابرت. جی، دانلدر، شرپرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمه دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبتکران. ۱۳۷۸.

نتایج بازی فوتبال

گل خورده	گل رده	نساوی	ناحت	برد
۲	۵	۱	۱	۲
۳	۶	۱	۱	۲
۳	۱	۰	۲	۱
۴	۰	۱	۱	۲

این جدول،
رده بندی مسابقه فوتبالی
را که طی شش بازی
انجام گرفته است، بین
تیم های (الف)، (ب)،
(ج) و (د) نشان
می دهد. در این
مسابقه، هر تیم با سه تیم
حریف بازی کرده
است. به نظر شما نتایج
دوبه دوی تیم ها
چيست؟

(الف) ب =
(الف) ج =
(الف) د =
(ب) ج =
(ب) د =
(ج) د =