

آیا قاعده هویتال همیشه کارآمد است؟!

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad !??$$

برای دانش آموزان
سال سوم و دوره
پیش دانشگاهی

قسمت اول

مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

میل می‌کند، دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است، اما در متون درسی بعدی، حسابان به غلط به «قاعده هویتال» شهرت یافت.

مقدمه

یکی از هدف‌های آموزش ریاضی در دوره متوسطه، تقویت قوه خلاقیت و ابتکار دانش آموزان است. در بخشی از ریاضیات که به محاسبه حدود و رفع ابهام در برخورد با صورت‌های مبهم می‌پردازد، دانش آموزان دست به عمل می‌زنند، می‌اندیشند، می‌نویسند و جلو می‌روند، شکست می‌خورند و دوباره، با اندیشه‌ای نو، به ستیز با مسأله

یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸)، از جمله کسانی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال لایبنیتز را به طور کامل درک کرد و به قدرت اعجاب انگیز حسابان، پی برد. او یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود و حساب دیفرانسیل و انتگرال را به هویتال، شاگرد خود، آموخت. هویتال در سال (۱۶۹۶) درس‌های استاد خود را در کتابی به نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به شمار می‌رود، منتشر ساخت. در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر

می‌پردازند. اما با کمال تأسف، عده‌ای از همکاران با معرفی قاعده هویتال در سال سوم متوسطه و همچنین، توصیه به استفاده بیش از حد از آن در دوره پیش دانشگاهی، خصوصاً جهت پاسخگویی به سؤالات چند گزینه‌ای، دانش‌آموزان عزیز را به سمت سستی و کلیشه‌ای شدن راهنمایی می‌کنند. متأسفانه در این شرایط، هرگاه برای حل یک مسأله مربوط به محاسبه حد، قاعده هویتال کارساز نباشد یا شرایط استفاده از آن وجود نداشته باشد، بچه‌ها قدرت، توانایی و مهارت لازم برای حل آن را به کمک روش‌های دیگر ندارند. البته دانش‌آموزان نیز این قاعده را به راحتی پذیرفته، به آن دل بسته‌اند و بسیار از آن استفاده می‌کنند؛ زیرا کار کردن با مشتق‌گیری به جهت قواعد کلیشه‌ای آن، بسیار ساده‌تر و بی‌دردتر از بقیه روش‌ها به نظر می‌رسد.

در این مقاله، سعی داریم، ضمن اشاره‌ای تاریخی به قاعده هویتال و بیان آن، بی‌دقتی‌های موجود در استفاده از آن را متذکر شویم و ناکارآمدی قاعده هویتال و زیبایی روش‌های دیگر را در پاره‌ای از مسائل نشان دهیم.

اشاره‌ای تاریخی

یکی از سرشناس‌ترین خانواده‌ها در تاریخ ریاضیات و علوم، خانواده برنولی از سوئیس است که از اواخر قرن هفدهم به بعد، حدود هشت ریاضیدان برجسته و توانا را پرورش داده است. مشهورترین آن‌ها یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و برادرش یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) بودند که همه توجهشان را به ریاضیات بی‌نهایت کوچک‌ها معطوف کردند و نخستین کسانی بودند که حساب دیفرانسیل و انتگرال لایبنتز را به طور کامل درک کردند و به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان پی بردند.

از جمله کارهای یاکوب برنولی، می‌توان به مسأله «هم محیط‌ها» (در بین شکل‌های مسطح بسته‌ای که طول محیط آن‌ها ثابت است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد)، مسأله «همزمان» (منحنی‌ای که جسمی در امتداد

آن با سرعت عمودی یکنواختی سقوط می‌کند)، توزیع برنولی و قضیه برنولی در آمار و احتمال، معادله برنولی در معادلات دیفرانسیل، اعداد برنولی و چندجمله‌ای‌های برنولی در نظریه اعداد، لمنیسکات برنولی در حسابان و... اشاره کرد.

یوهان برنولی در ریاضیات سهمی پربارتر از برادرش یاکوب داشت. از جمله کارهای یوهان می‌توان به پدیده نورشناختی مربوط به انعکاس و انکسار، تعیین مسیرهای متعامد خانواده منحنی‌ها، محاسبه طول قوس منحنی‌ها، تعیین مساحت منحنی‌ها به کمک سری‌ها، مثلثات تحلیلی، حسابان توابع مجهول‌القوا و قضیه طلایی «کوته‌ترین زمان» (تعیین منحنی ذره‌وزینی که در یک میدان جاذبه، بین دو نقطه مفروض حرکت می‌کند و طی آن سریع‌ترین نزول را دارد) و... اشاره کرد.

یوهان با لایبنتز و اوایلر دوست بود. ولی نیوتن، رقیب لایبنتز را، چندان دوست نمی‌داشت. لایبنتز، حساب انتگرال را «حساب مجموعات» نامیده بود و در سال ۱۶۹۶ لایبنتز و یوهان برنولی موافقت کردند که آن را «حساب انتگرال» بنامند. اگرچه یوهان مردی حسود و بداخلاق بود، اما یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود. او به حسابان غنای زیادی بخشید و در شناساندن قدرت حسابان در براروپا تأثیر زیادی داشت.

دو لوپیتال گیوم فرانسوا آنتوان (Giyom fransua antuan da lopital) (۱۶۶۱-۱۷۰۴)، اشراف‌زاده فرانسوی، یکی از دانشجویان یوهان برنولی بود. یوهان حساب دیفرانسیل و انتگرال را به او آموخت و لوپیتال که در فارسی به اشتباه، هویتال نوشته شده و همین تلفظ رایج شده است (در این مقاله ما نیز عرف را رعایت می‌کنیم)، در سال (۱۶۹۶)، براساس یک توافق‌نامه مالی عجیب و غیرعادی، درس‌های استاد خود را در کتابی با نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» (Analyse de infiniment petits) که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌رود،

منتشر ساخت.

در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کنند،
 $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ درحالی‌که } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?)$
 دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است. اما در متون درسی بعدی، حسابان به غلط به «قاعده هوییتال» شهرت یافت.

پیش نیازها

تعریف صورت‌های مبهم و رفع ابهام: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطه a (اعددی حقیقی)، احتمالاً نه در نقطه a ، پیوسته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ،
 در این صورت وجود یا عدم وجود مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ روشن نیست و اصطلاحاً این حالت را صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌نامند.
 دیگر صورت‌های مبهم عبارتند از: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{0}$ ،
 یافتن مقدار واقعی صورت مبهم را «رفع ابهام» می‌نامند.

قضیه (قاعده) هوییتال: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطه a (اعددی حقیقی زیرا ∞ همسایگی ندارد)، احتمالاً نه در نقطه a ، مشتق‌پذیر و g' و f' مخالف صفر باشند و
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت اگر
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر l ($l \in \mathbb{R}$) باشد، آن‌گاه
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود و برابر l است.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ ،
 حل: فرض کنیم $f(x) = 1 - \cos x$

$g(x) = \sin^2 x$. مشاهده می‌شود که توابع f و g در این همسایگی محذوف نقطه صفر مشتق‌پذیر و g' و f' در این همسایگی مخالف صفر هستند و
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ بنابراین، شرایط قاعده هوییتال برقرار است و از آن‌جا که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$
 نکته ۱: اگر در قاعده هوییتال $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ (حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$) و
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر $l \in \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه
 نیز موجود و برابر l می‌باشد.

مثال ۲. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ ،
 حل: شرایط قاعده هوییتال برقرار است
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

نکته ۲: اگر در قاعده هوییتال $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm \infty$ باشد، باز هم می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$ ،

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعده هوییتال را دارد؛ بنابراین:

در استفاده از قاعده هوییتال دقت کنید.

بسیار اتفاق می افتد که دانش آموزان و دانشجویان عزیز، در استفاده از قاعده هوییتال به شرایط آن توجه نمی کنند و مرتکب اشتباهات بارزی در حل بعضی مسائل ساده می شوند. به نمونه هایی از این اشتباهات اشاره می کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1+x}$

حل دانش آموز:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1} = 1$$

در حالی که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1+x}$ مبهم نیست و کسر $\frac{\tan x}{1+x}$ در

همسایگی صفر پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1+\cos x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

نکته ۳: در استفاده از قاعده هوییتال، گاه ممکن است $\pm \infty$ یا $f'(a) = g'(a) = 0$ باشد در این حالت، در صورتی که f' و g' در یک همسایگی نقطه a دارای مشتق باشند، مجدداً می توان از قاعده هوییتال استفاده کرد و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = l$$

عبارت دیگر در صورت برقراری شرایط قاعده، بیش از یک بار هم می توان از قاعده هوییتال استفاده کرد.

مثال ۴. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعده

هوییتال را دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$$

از آن جا که حد حاصل، هنوز حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد و

شرایط قاعده هوییتال نیز برای آن برقرار است، بنابراین قاعده هوییتال را دوباره به کار می بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x)}{\cos x} = 2 \end{aligned}$$

و در نتیجه: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2$

تمرین ۱. با استفاده مکرر از قاعده هوییتال، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^4}{x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x}$

هشدار!
در استفاده از قاعده هوییتال از مبهم بودن حد، اطمینان حاصل کنید. یعنی درستی شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ را تحقیق کنید.

مثال ۶. مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 - 3x - 2}$$

حل دانش آموز:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 - 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 2}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

در حالی که اعمال قاعده هوییتال برای بارهای دوم و سوم

مجاز نیست، زیرا $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3}$ مبهم نبوده و برابر

$\frac{7}{3}$ است.

مثال ۷. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$

حل دانش آموز:

حل دانش آموز:

بنابر قضیه فشردگی داریم:

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

$$= \frac{0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}}{1}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \rightarrow \text{موجود نیست}$$

پس بنابر قاعده هوییتال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ نیز وجود

ندارد.

در حالی که حد مورد نظر موجود و برابر صفر است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \times 1 = 0$$

مثال ۱۰. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x}$.

حل دانش آموز: حد فوق، حالت مبهم $0 \times \infty$ را دارد.

با تبدیل به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{x^2} (1 + \tan^2(\frac{1}{x}))}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

در حالی که اعمال قاعده هوییتال برای دومین بار مجاز

نیست و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x}$ مبهم نبوده و برابر صفر است.

هشدار!

در استفاده مکرر از قاعده هوییتال، در هر مرحله، از مبهم بودن حد اطمینان حاصل کنید.

هشدار!

در اعمال قاعده هوییتال، به دام مشتق گیری از $\frac{f}{g}$ نیافتید؛ کسری که باید به کار رود $\frac{f'}{g'}$ است نه $(\frac{f}{g})'$.

مثال ۸. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

حل دانش آموز: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \rightarrow \text{موجود نیست}$$

پس بنابر قاعده هوییتال $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ نیز موجود

نیست.

در حالی که حد مورد نظر موجود بوده و برابر ۱ می باشد زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1 + 0 = 1$$

بنابر قضیه فشردگی:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

مثال ۹. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

منابع

۱. تلگینی، محمدر و خردبیشه، فروزان و رجالی، علی و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۷۸.
۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.
۳. تمبل بل، اریک. ریاضی دانان نامی. ترجمه حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.
۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصه زندگینامه علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.
۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علی اکبر عالمزاده و غلامرضا زباندان. چاپ اول. قارابی. ۱۳۷۲.
۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.
۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.
۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره ای بر آنالیز ریاضی. ترجمه بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا (ع). ۱۳۷۶.
۹. استورات، جیمز. حسابان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه محمدحسین علامت ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.
۱۰. آذربانه، فریبرز. روش های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبه حد. رشد آموزش ریاضی. شماره ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. پاییز ۱۳۷۶.
۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمه سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.
۱۲. توماس، جرج. بی و فنی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه علی اکبر عالمزاده و داریوش بهمدی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.
۱۳. بارتل، رابرت. جی، دانلد، شربرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمه دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبنکران. ۱۳۷۸.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^{-1}(\frac{1}{x})) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x}$ نیز موجود نیست.

درست است که $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x}$ واقعاً وجود ندارد، اما

این نتیجه گیری با استناد به قاعده هوییتال درست نیست. برهان صحیح زیر را ببینید.

برهان خلف: فرض می کنیم حد فوق موجود و برابر L باشد

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x} = L \text{ یعنی در نتیجه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \tan \frac{1}{x}} = \frac{0}{L} = 0 \quad (*)$$

در حالی که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \tan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cot \frac{1}{x} = +\infty$$

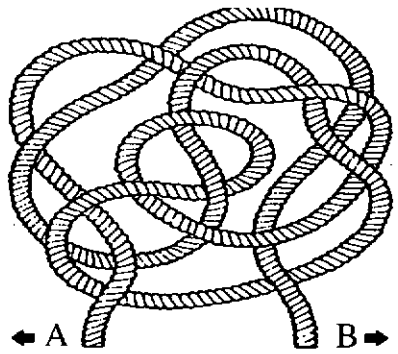
که با $(*)$ متناقض است. بنابراین فرض خلف باطل

بوده و $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x}$ موجود نیست.





تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه



مساله گرهی

قطعه طنابی به شکلی که در روبرو می بینید، درهم پیچیده شده است. بدون استفاده از هیچ وسیله ای و تنها به کمک حافظه و ذهن خود، طناب را از دو انتهای A و B بگیرید و آن را به حدی بکشید که ساده ترین گره ممکن، به وجود آید. شکل گرهی را که ایجاد کرده اید، روی کاغذ رسم کنید و با جواب معما مقایسه کنید: