

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۳)

آیا یک عدد، به حاصلضرب عوامل اول یکتا تجزیه می شود؟

(اقتباس)

از مجله: QUANTOM

ترجمه: غلامرضا یاسی پور

۵۹×۵۰۹ که هر دو اولند تجزیه کرد. اکنون تحت چه مبنایی به طور مسلم می توان گفت که واضح است آزمایشهای دیگر، عوامل دیگری را که با این عوامل متفاوتند به دست نمی دهد؟ این مطلب با تمام مفاهیمی که در پذیرفتن این که حاصلضرب اعداد اول مشخصی به یک عدد مشخص تبدیل می شود، آموخته ایم مغایرت دارد. در این بحث غرض از قسمتهای ۲ و ۳ این است که نشان داده شود این مفاهیم شهودی مبنای صحیحی ندارند. پس از آن با نشان دادن این موضوع که در این مورد، به حقیقت، مسأله ای مطرح است، در باقیمانده مقاله به اثبات این مطلب می پردازیم که «تجزیه اعداد به عوامل اول واقعاً یکتاست».

۲. برای این که خویش را از مفاهیم از پیش داوری شده برکنار کنیم دستگاه عددی ناآشنایی را مورد بررسی قرار می دهیم، و اعداد به صورت $a + b\sqrt{6}$ را که در آنها a و b اعداد صحیح اند، در نظر می گیریم. به عنوان مثال، $12 + 5\sqrt{6}$ ، $2 - \sqrt{6}$ و $3\sqrt{6}$ از چنین اعدادی هستند. درحالی که $2 + 3\sqrt{12}$ نیست. در این دستگاه اعداد صحیح را کنار نگذاشته ایم، این اعداد در حقیقت b را مساوی صفر دارند و قسمتی از دستگاه عدیدیمان را تشکیل می دهند و بنابراین، این دستگاه جدید نگاشت مجموعه اعداد صحیح است. محاسبه با این اعداد درست به همان طریق که طبیعتاً انتظار می رود انجام می گیرد و تمام اعمال با استفاده از جبر، آشنا هستند. طریق جمع و تفریق دو عدد از این اعداد از مثال زیر معلوم می شود.

$$(3 + \sqrt{6}) + (5 + \sqrt{6}) = 8 + 2\sqrt{6}$$

ضربهای زیر که توسط قواعد معمول جبر انجام شده اند، چگونه

عمل ضرب هر دو عدد از این اعداد را نشان می دهند.

$$(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) = 9 - 6 = 3$$

۱. هر عدد معلوم را می توان به حاصلضرب عوامل اول چنان تجزیه کرد که در آخر تنها عوامل اول در حاصلضرب موجود باشند. به عنوان مثال، ۶۰ را می توان به صورت $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ را به صورت 2×3 ، و ۱۰ را به صورت 2×5 تجزیه کرد و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

و همان طور که معلوم است تمام این عوامل اولند.

به طریقی دیگر می توانیم این عدد را ابتدا به صورت:

$$60 = 4 \times 15 \quad \text{و} \quad 4 = 2 \times 2 \quad \text{و} \quad 15 = 3 \times 5$$

تجزیه کنیم و از آن:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

را به دست آوریم. همان طور که مشاهده می شود در هر دو حالت در تجزیه عوامل یکسان ظاهر شده اند و تعداد این عوامل نیز در هر دو حالت یکی است. یا به ترتیب اندازه نوشتن این عوامل اول در هر دو حالت داریم:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

این حقیقت که در هر دو این حالات به یک نتیجه می رسیم بسیار واضح به نظر می رسد و این بدان علت است که چنان عادت کرده ایم. چه، در حساب چنین فرض کرده ایم که چون عددی را تا آنجا که ممکن است به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنیم، همواره - بی توجه به اینکه کار را چگونه آغاز کرده ایم - عوامل یکسان به دست می آوریم.

این گزاره راست است، اما حقیقتاً آن طور که به نظر می رسد واضح است؟ عدد بزرگی چون 30×31 را در نظر می گیریم و ملاحظه می کنیم که برای تجزیه آن به کار قابل ملاحظه ای نیاز داریم. و ممکن است پس از آزمایشهای بسیار کشف کنیم که این عدد را می توان به حاصلضرب

نیست.

۳. اکنون دستگاه عددی دیگری را در نظر می‌گیریم. این دستگاه مجموعه اعداد به صورت $a + b\sqrt{-6}$ است که در آن بار دیگر a و b اعداد صحیح معمولی هستند. در این حالت نیز وضعیتی نظیر (۱) پیدا می‌کنیم، اما این مرتبه نمی‌توانیم آن را آن گونه که (۱) را با (۲) توضیح دادیم توضیح دهیم. محاسبات در این دستگاه به همان سادگی محاسبه در دستگاه $a + b\sqrt{6}$ است و قواعد جبر درست به همان ترتیب که قبلاً به کار می‌رفتند، به کار می‌روند. در این صورت متناظر با (۱) داریم:

$$6 = 2 \times 3 = -\sqrt{-6}\sqrt{-6} \quad (3)$$

مشابه با حالت دیگر، سعی می‌کنیم که ۲، ۳ و $\sqrt{-6}$ را تجزیه کنیم. اما این بار چنان معلوم می‌شود که این اعداد در این دستگاه اولند و نمی‌توانیم آنها را تجزیه کنیم.

بهرتر است که در این بحث از مفهوم «نرم» یک عدد استفاده کنیم. نرم عدد $a + b\sqrt{-6}$ حاصلضرب این عدد با $a - b\sqrt{-6}$ است، یعنی

$$N(a + b\sqrt{-6}) = (a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6}) = a^2 + 6b^2$$

به عبارت دیگر، در این دستگاه، نرم یک عدد حاصلضرب آن عدد در عددی است که با قرار دادن $\sqrt{-6}$ به جای $\sqrt{-6}$ در آن عدد به دست می‌آید. به این ترتیب نرم یک عدد همواره یک عدد صحیح و مثبت معمولی است. همچنین نرم حاصلضرب دو عدد، برابر با حاصلضرب نرم‌های آن دو عدد است. زیرا، بنا به قاعده، داریم:

$$N(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6}) \\ = [(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})][(a - b\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6})]$$

این چهار عامل را می‌توان به صورت:

$$(a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6})$$

نوشت که طبق قاعده دقیقاً:

$$N(a + b\sqrt{-6})N(c + d\sqrt{-6})$$

است.

اگر در این دستگاه بتوان ۲ را به صورت دو عامل تجزیه کرد، داریم:

$$2 = (a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})$$

و در نتیجه:

$$N(2) = N(a + b\sqrt{-6})N(c + d\sqrt{-6})$$

$$(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2) = 6 - 4 = 2$$

$$(3 + \sqrt{6})(\sqrt{6} - 2) = 3\sqrt{6} - 6 + 6 - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$(3 - \sqrt{6})(\sqrt{6} + 2) = \sqrt{6}$$

$$(3 + \sqrt{6})(2 + \sqrt{6}) = 12 + 5\sqrt{6}$$

$$(3 - \sqrt{6})(\sqrt{6} - 2) = -12 + 5\sqrt{6}$$

در مورد تقسیم نیازی نیست که سخنی گفته شود. چه، درست مانند مورد اعداد صحیح، گاهی عددی بر عدد دیگر تقسیم می‌شود و گاهی نمی‌شود.

در این دستگاه عددی، ۶ را می‌توان چون طریق معمول، به $\sqrt{6}\sqrt{6}$ تجزیه کرد.

$$6 = 2 \times 3 = \sqrt{6}\sqrt{6} \quad (1)$$

در این مثال، ۶ به ظاهر به دو طریق متفاوت تجزیه می‌شود. و این مطلب منجر به این می‌شود که سؤال قبل، یعنی آیا 30×31 تجزیه‌ای متفاوت با 59×59 دارد یا خیر، را به خاطر بیاوریم. چنین می‌نماید که (۱) وضعیتی مشابه این وضعیت را نمایش می‌دهد.

اما این حالت را می‌توان به روشی بسیار طبیعی توضیح داد و آن به این طریق است که اعداد ۲ و ۳ اعدادی اولند و نمی‌توانند در دستگاه عددی معمولی تجزیه شوند، اما می‌توان آنها را در دستگاه جدید تجزیه کرد. درحقیقت، با استفاده از مثالهای ضریمان داریم:

$$2 = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2), \quad 3 = (3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})$$

در این صورت، با ادامه دادن به تجزیه $6 = 2 \times 3$ خواهیم داشت

$$6 = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) \quad (2)$$

دو تجزیه (۱) صرفاً همان (۲) با جفت‌های عوامل متفاوتند. چه، تجزیه اول (۱) از ترکیب دو عامل اول و دو عامل آخر (۲) به دست می‌آید، و تجزیه دوم آن از ترکیب عوامل اول و چهارم، همین طور دوم و سوم (۲) حاصل می‌شود.

واضح است که در این مورد ترکیبات دیگری نیز وجود دارد. به عنوان مثال، اگر عوامل اول و سوم و عوامل دوم و چهارم را ترکیب کنیم خواهیم داشت:

$$6 = (12 + 5\sqrt{6})(-12 + 5\sqrt{6})$$

درستی این تجزیه را می‌توان با استفاده از ضرب اثبات کرد.

این وضع با وضعی که با آن آشناییم تفاوت ندارد. چه، در توضیح آن مجبور نبودیم که بدانیم عوامل واقع در (۲) اولند. واضح است که اکنون از اعداد اول عددی را در نظر می‌گیریم که نتواند در دستگاهمان تجزیه شود، و نشان دادن این که چهار عامل مورد بحث اولند مشکل

اما نرم ۲ عبارت است از

$$N(2) = (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6}) = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین داریم:

$$4 = (a^2 + 6b^2)(c^2 + 6d^2)$$

یعنی، باید ۴ به حاصلضرب دو عدد صحیح معمولی هر یک به صورت $x^2 + 6y^2$ تجزیه شود. اما تنها به دو طریق است که می توان ۴ را با استفاده از اعداد معمولی تجزیه کرد، در یکی از این دو، هر دو عامل ۲ و در دیگری یکی ۴ و دیگری یک است، و هیچ یک از این دو به کارمان نمی آید؛ چرا که ۲ را نمی توان به صورت $x^2 + 6y^2$ درآورد و ۱ تنها به ازای $x=1, y=0$ به این صورت درمی آید. بنابراین تنها طریقی که طبق آن ۲ را می توان در این دستگاه به دو عامل تجزیه کرد،

این است که یکی از عوامل $1 + \sqrt{-6}$ باشد. ولی ما این تجزیه را در دستگاهمان به عنوان تجزیه در نظر نمی گیریم، همان طور که $5 = 1 \times 5$ را در دستگاه عددی معمولی به عنوان یک تجزیه در نظر نمی گرفتیم.

با روشی دقیقاً شبیه این روش می توان دریافت که ۳ و $\sqrt{-6}$ در این دستگاه اولند. درحالی که به جای نرم ۴، نرمهای ۹ و ۶ باید به صورت $x^2 + 6y^2$ تجزیه شوند.

یادداشت:

1. Norm

ادب ریاضی



پتلاخورت

کتابی که به اقلیدس فیثاغوری منسوب است، شامل اصول هندسه و عدد می باشد، این کتاب به نام *أُسْطُقْسَات* معروف شده، و مطالعه در این اصول از دو راه است: راه تحلیل، و راه ترکیب. دانشمندان پیشین این رشته - غیر از اقلیدس - در کتابهای خود، راه تحلیل و ترکیب را با هم آورده اند، اما اقلیدس مطالب کتاب خود را تنها براساس ترکیب، تألیف کرده است.

«احصاء العلوم»