

محاسبه تعداد تبدیلات

۱. اگر n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد جایگشتهای

این n شیء برابر با $n!$ است؛ یعنی: $P_n = n!$

مثال. ۵ دانش آموز، به چند طریق می توانند روی یک ردیف

نیمکت بنشینند.

حل.

$$n = 5 \Rightarrow P_n = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

مثال. با حروف کلمه flower چند کلمه شش حرفی معنادار یا

بی معنا، بدون تکرار حروف می توان ساخت؟

حل.

$$n = 6 \Rightarrow P_n = 6! = 1 \times 2 \times \dots \times 6 = 720$$

۲. تعداد جایگشتهای (تبدیلهای) r شیء از n شیء

($r \leq n$)

فرض کنیم n شیء متمایز داریم، هر جایگشت (تبدیل) r تایی

از این n شیء که در آن $r \leq n$ ، عبارت است از دسته های r تایی

از این n شیء، به طوری که در هر دسته، ترتیب قرار گرفتن این

r شیء دارای اهمیت باشد و با تعویض جای آنها، شیء جدیدی

حاصل شود. تعداد تبدیلهای r تایی را با $P(n, r)$ نشان می دهیم و

مقدار آن را طبق فرمول زیر به دست می آوریم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}; (r \leq n)$$

اثبات. چون r خانه و n شیء داریم، بنابراین خانه اول با

n شیء، خانه دوم با $(n-1)$ شیء، ... و خانه r ام با $(n-r+1)$

شیء پر می شود؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم	...	خانه r ام
n	$n-1$	$n-2$	...	$(n-r+1)$

$$P_n = n(n-1)(n-2) \times \dots \times [(n-r)+1]$$

با ضرب طرف راست برابری بالا در

$$(n-r)(n-r-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n-r)(n-r-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

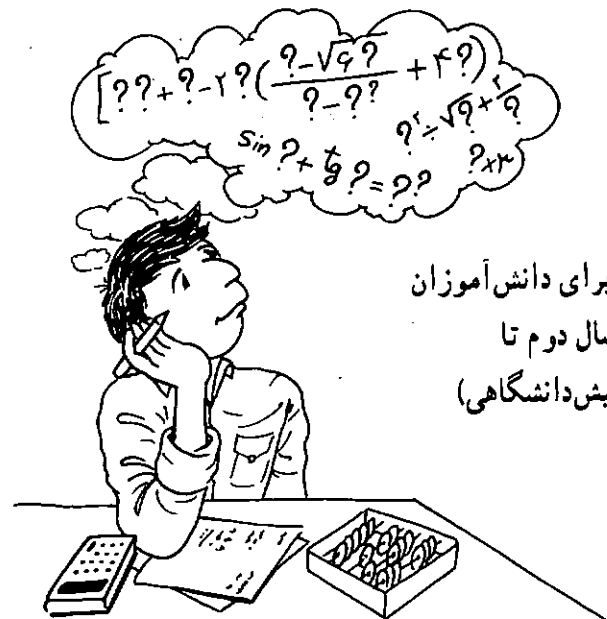
داریم:

$$P_n = \frac{n(n-1) \times \dots \times [(n-r)+1] \times (n-r)(n-r-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r)(n-r-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$P_n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

آنالیز ترکیبی

(قسمت دوم)



(برای دانش آموزان

سال دوم تا

پیش دانشگاهی)

• میر شهرام صدر

جایگشت، تبدیل و ترکیب

جایگشت

فرض کنیم n شیء داریم، هر یک از حالت های کنار هم قرار

گرفتن این n شیء را یک جایگشت از آن n شیء گوئیم. تعداد

جایگشت های n شیء را با نماد P_n نمایش می دهیم. برای مثال،

جایگشت های سه شیء a, b, c به صورت زیر است:

$abc, acb, bca, bac, cab, cba$

همچنین جایگشت های دو شیء از سه شیء a, b, c عبارت

است از:

ab, ba, ac, ca, bc, cb

فاکتوریل

فرض کنید n عددی حسابی باشد، $n!$ (یخوانید n فاکتوریل)

تابعی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ یا } 1 \\ 1 \times 2 \times \dots \times n & n > 1 \end{cases}$$

بنابراین، طبق این تعریف داریم:

$$0! = 1! = 1, \quad 6! = 1 \times 2 \times \dots \times 6 = 720$$

$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{m-1})$ انتخاب داریم. به همین ترتیب، برای $f(a_r)$ ، $f(a_{m-2})$ انتخاب و ... و برای $f(a_n)$ ، $f(a_{m-n+1})$ انتخاب داریم؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & & f(a_n) \\ \boxed{m} & \boxed{m-1} & \boxed{m-2} & \dots & \boxed{(m-n)+1} \end{array}$$

تعداد نگاشتها (یک به یک از مجموعه A به مجموعه B)

$$= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

$$= P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعه دو عضوی A به مجموعه هفت عضوی B، چند نگاشت یک به یک می توان تعریف کرد؟
حل.

$$P(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$$

۳. تعداد تبدیلهایی که شامل یک شیء مشخص هستند
n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر می گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که در همه آنها a_1 به کار رفته است، از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$r \times P(n-1, r-1) = \frac{r(n-1)!}{(n-r)!}$$

مثال. با حروف کلمه CHAIR چند کلمه ۳ حرفی می توان ساخت؛ به طوری که شامل حرف A باشد؟
حل.

$$n = 5, r = 3; 3 \times P(5-1, 3-1)$$

$$= 3 \times P(4, 2) = \frac{3 \times 4!}{2!} = 36$$

۴. تعداد تبدیلهایی که فاقد یک یا چند شیء مشخص هستند

n شیء متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر می گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که فاقد شیء a_1 هستند، از فرمول زیر محاسبه می شود: ($r < n$)

$$P(n-1, r) = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}$$

همچنین تعداد تبدیلهای r تایی از n شیء که فاقد k شیء مشخص

مثال. با حروف کلمه CHAIR، چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت؟

$$n = 5, r = 3; P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

تست. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟ (بدون تکرار رقمها)

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

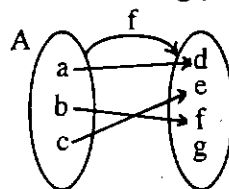
حل. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$n = 6, r = 4; P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

مثال: با حروف کلمه TRIANGLE چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟ (بدون تکرار حروف)
حل.

$$n = 8, r = 3; P(8, 3) = \frac{8!}{5!} = 336$$

محاسبه تعداد نگاشتهای یک به یک از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی ($m \leq n$)



نگاشت رو به رو را از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{d, e, f, h\}$ در نظر بگیرید.

همان طور که ملاحظه می کنید، نگاشت $f: A \rightarrow B$ (مفهوم نگاشت را در شماره قبل بیان کرده ایم)، تابعی یک به یک است؛ یعنی اگر نگاشت f را به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب بنویسیم، آن گاه مؤلفه های دوم زوجهای مرتب، با یکدیگر متمایزند.

$$f = \{(a, d), (b, f), (c, e)\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعه n عضوی و B یک مجموعه m عضوی باشد و $n > m$ ، در این صورت، از A به B نگاشت یک به یک نمی توان تعریف کرد. بنابراین برای این که بتوان از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B، نگاشت یک به یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n \leq m$.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ و $n \leq m$ ، می خواهیم تعداد نگاشتهای یک به یک $f: A \rightarrow B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی a_1 اثر می دهیم؛ $f(a_1)$ می تواند برابر b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد؛ یعنی برای $f(a_1)$ ، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_1) = b_j$ که $1 \leq j \leq m$. در مرحله بعد، f را روی a_2 اثر می دهیم. برای این که نگاشت f یک به یک باشد، باید $f(a_2) \neq b_j$ ؛ یعنی برای

باشند، برابر است با:

$$P(n-k, r) = \frac{(n-k)!}{(n-k-r)!} \quad (n > k+r) \quad \text{با شرط}$$

را یک گروه، نفر سوم را یک گروه و نفر چهارم را یک گروه در نظر بگیریم، آن گاه این سه گروه به $3!$ حالت کنار هم قرار می گیرند؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$P_n = 3! \times 2! = 12$$

حالت کلی. اگر k دسته شیء داشته باشیم؛ به طوری که دسته اول شامل n_1 شیء متمایز، دسته دوم شامل n_2 شیء متمایز، ... و دسته k ام شامل n_k شیء متمایز باشند، در این صورت، تعداد کل حالت هایی که این اشیا کنار هم قرار می گیرند؛ به طوری که اشیا هر دسته کنار هم واقع باشند، برابر است با:

$$P_n = n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \times k!$$

مثال. ۴ مداد، ۵ خودکار و ۷ خودنویس، به چند طریق می توانند کنار هم قرار گیرند، به طوری که همواره مدادها، خودکارها و خودنویسها کنار هم باشند.

حل.

$$P_n = 4! \times 5! \times 7! \times 3!$$

زیرا ۴ مداد به $4!$ حالت، ۵ خودکار به $5!$ حالت و ۷ خودنویس به $7!$ حالت می توانند کنار هم قرار گیرند و اگر ۴ مداد را یک گروه، ۵ خودکار را یک گروه و ۷ خودنویس را یک گروه در نظر بگیریم، آن گاه این سه گروه به $3!$ حالت می توانند کنار هم قرار گیرند؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$P_n = 4! \times 5! \times 7! \times 3!$$

۷. تعداد تبدیلیهایی که n شیء متمایز به صورت حلقه قرار می گیرند

n شیء متمایز با $(n-1)!$ حالت می توانند یک حلقه تشکیل دهند یا دور میز گردی قرار بگیرند.

مثال. به چند طریق ۵ دانش آموز می توانند دور میز گردی بنشینند یا به چند طریق ۵ دانش آموز می توانند دستهای یکدیگر را گرفته و تشکیل یک حلقه دهند؟

حل.

$$P_n = (5-1)! = 4! = 24$$

۸. تبدیل با تکرار

فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آنها k نوع شیء متمایز وجود داشته باشد؛ به طوری که n_1 تا از آنها از نوع اول، n_2 تا از آنها نوع دوم، ... و n_k تا از آنها از نوع k ام باشند و $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیلیهای متمایز این n شیء برابر است با:

۵. تعداد تبدیلیهای یک در میان قرار دادن اشیا

الف: هرگاه دو دسته n تایی از اشیا متمایز داشته باشیم و بخواهیم آنها را یک در میان قرار دهیم، تعداد تبدیلیهای یک در میان آنها برابر است با:

$$P_n = 2 \times n! \times n!$$

مثال. سه کتاب ریاضی متمایز و سه کتاب فیزیک متفاوت داریم، به چند طریق می توان این کتابها را به صورت یک در میان در یک طبقه کتابخانه قرار داد؟

$$n = 3; P_n = 2 \times 3! \times 3! = 72$$

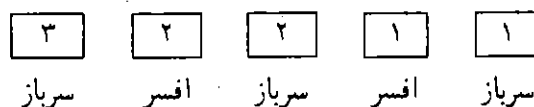
ب: در صورتی که بخواهیم اشیا دو دسته، یکی n تایی و دیگری $(n-1)$ تایی را یک در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد تبدیلیهای یک در میان برابر است با:

$$P_n = n! \times (n-1)!$$

مثال. سه سرباز و دو افسر، به چند طریق می توانند یک در میان در یک ردیف بنشینند؟

$$P_n = 3! \times 2! = 12$$

حل.



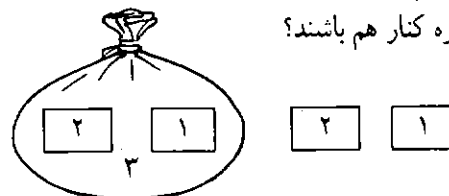
۶. تعداد تبدیلیهایی که در آنها دو یا چند شیء کنار هم قرار دارند

برای یافتن تعداد تبدیلیهای n شیء، به شرط آن که r تا از آنها کنار هم قرار گیرند، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$P_n = (n-r+1)! \times r!; (r \leq n)$$

مثال. به چند طریق می توانند سه دانش آموز که دو نفر آنها برادر هستند، کنار هم روی یک ردیف نیمکت بنشینند؛ به طوری که دو برادر همواره کنار هم باشند؟

حل.



$$P_n = (4-2+1)! \times 2! = 3! \times 2! = 12$$

دو برادر به $2!$ حالت کنار هم قرار می گیرند، اگر اکنون دو برادر

$$r! \times C(n, r) = P(n, r)$$

$$\Rightarrow C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

در نتیجه داریم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برای مثال، تعداد ترکیبهای سه حرفی از چهار حرف a, b, c و d یا تعداد زیرمجموعه‌های سه عضو از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ برابر است با:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

این چهار زیرمجموعه، عبارت است از: $\{a, b, c\}$ ، $\{a, b, d\}$ ، $\{b, c, d\}$ و $\{a, c, d\}$ ، ملاحظه می‌کنیم که اگر در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، ترتیب عضوها را عوض کنیم، زیرمجموعه جدیدی به دست نمی‌آید.

مثال. داخل جعبه‌ای ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توان تصادفی و یکجا ۴ مهره از این جعبه خارج کرد؟

حل. داخل جعبه ۸ مهره داریم و می‌خواهیم یک زیرمجموعه ۴ عضوی انتخاب کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

تست. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفری از بین ۷ دانشجو و ۵ دانش‌آموز انتخاب کرد؟

$$110 \quad (1) \quad 330 \quad (2) \quad 440 \quad (3) \quad 220 \quad (4)$$

حل. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا می‌خواهیم از بین ۱۲ نفر، یک زیرمجموعه ۳ عضوی انتخاب کنیم:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

حاصل برخی از مقادیر $\binom{n}{r}$ ($r \leq n$):

$$1) \binom{n}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{1} = n$$

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال. با حروف کلمه MATHEMATICS چند کلمه ۱۱

حرفی می‌توان ساخت؟

حل. چون در این کلمه، M دو بار، A دو بار و T دو بار تکرار

شده است؛ بنابراین داریم:

$$P_n = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!}$$

تست. ۷ نفر مسافر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق سه

تخته و دو اتاق دو تخته قرار گیرند؟

$$180 \quad (4) \quad 210 \quad (3) \quad 120 \quad (2) \quad 360 \quad (1)$$

حل. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$P_n = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

ترکیب

سه شیء a, b و c را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای دوتایی

از این سه شیء، برابر ۶ است.

تبدیل دوتایی از سه شیء $P(3, 2)$	ترکیب دوتایی از سه شیء $C(3, 2)$
ab, ba	{a, b}
ac, ca	{a, c}
bc, cb	{b, c}

مرگه در انتخاب دوتایی از این سه شیء، ترتیب قرار گرفتن

اشیاء را در نظر نمی‌گیریم، به عبارت دیگر، زیرمجموعه‌های دو عضوی

از این سه شیء را بنویسیم، طبق تعریف، یک ترکیب ۲ تایی از ۳

شیء داریم و آن را با نماد $C(3, 2)$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که

طبق جدول بالا ملاحظه می‌کنید، تعداد تبدیلهای ۲! برابر تعداد،

ترکیبهاست؛ بنابراین:

$$2! \times C(3, 2) = P(3, 2) \Rightarrow C(3, 2) = \frac{P(3, 2)}{2!}$$

به‌طور کلی، هر ترکیب، انتخاب اشیایی از میان چند شیء، بدون

در نظر گرفتن ترتیب برای آنهاست. به عبارت دیگر، هر زیرمجموعه

r عضوی از یک مجموعه n عضوی ($r \leq n$) را یک ترکیب

r تایی از n شیء گوئیم. تعداد این ترکیبها را با یکی از نمادهای

$C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و تعداد تبدیلهای r شیء از n شیء،

r! برابر تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء است؛ بنابراین داریم:

تعداد ترکیبهایی که حداکثر ۲ نفر از سه نفر دانش آموز باشند برابر است با تعداد کل ترکیبهای ۳ عضوی از ۱۲ عضو، منهای تعداد ترکیبهایی که هر سه نفر دانش آموز باشند.

کارمند دانشجو دانش آموز کل

$$T = \binom{12}{3} - \binom{3}{3} \times \binom{5}{0} \times \binom{4}{0} = 220 - 1 = 219$$

تعداد ترکیبهایی که فاقد k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که فاقد k شیء

مشخص اند، برابر با $T = \binom{n-k}{r}$ است.

مثال. چند تا از زیرمجموعه های ۵ عضوی مجموعه

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$
 فاقد عضوهای ۴، ۵ و ۶ هستند؟

حل.

$$n=10, r=5, k=3; \binom{10-3}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21$$

تعداد ترکیبهایی که شامل k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که شامل k شیء

مشخص اند، برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ است. ($k \leq r \leq n$)

مثال. چند تا از زیرمجموعه های ۴ عضوی مجموعه

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$
 شامل عضوهای ۵ و ۷ هستند؟

حل.

$$n=10, r=4, k=2; \binom{10-2}{4-2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = 28$$

تست. از بین ۸ دانش آموز که ۲ نفر آنها برادر هستند، به چند

طریق می توان کمیته ای ۵ نفری تشکیل داد که شامل هر دو برادر باشند.

$$40 \quad (4) \quad 30 \quad (3) \quad 20 \quad (2) \quad 10 \quad (1)$$

حل. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$n=8, r=5, k=2; \binom{8-2}{5-2} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

$$3) \binom{n}{n} = 1 \quad 4) \binom{n}{n-1} = n$$

$$5) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad 6) \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

مثال. به چند طریق می توان از بین ۳ دانش آموز، ۵ دانشجو و

۴ کارمند، کمیته ای سه نفری تشکیل داد؛ به طوری که:

الف. سه نفر انتخاب شده دارای شغل های متمایز باشند.

ب. از سه نفر انتخاب شده، دو نفر دانش آموز باشند.

ج. از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر دانش آموز باشند.

د. از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر دانش آموز باشند.

حل. الف. برای این که سه نفر انتخاب شده، دارای شغل های

مختلف باشند؛ بنابراین از هر کدام یک نفر انتخاب می کنیم:

کارمند دانشجو دانش آموز

$$T = \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

ب. دو حالت پیش می آید؛ حالت اول، دو دانش آموز و یک

نفر دانشجو، حالت دوم، دو دانش آموز و یک نفر کارمند، جواب

مسئله از مجموع جواب های حالت های اول و دوم به دست می آید:

کارمند دانش آموز دانشجو دانش آموز

$$T = \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} = 3 \times 5 + 3 \times 4 = 27$$

ج. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر آنها

دانش آموز باشند، بنابراین می تواند دو نفر دانش آموز یا سه نفر

دانش آموز انتخاب کنند؛ بنابراین دو حالت پیش می آید، حالت

اول، دو نفر دانش آموز و نفر سوم می تواند دانشجو یا کارمند باشد

و حالت دوم، هر سه نفر دانش آموز هستند؛ بنابراین:

$$T = \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 15 + 12 + 1 = 28$$

دو نفر دانش آموز هستند

د. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر آنها

دانش آموز باشند، بنابراین می تواند دو نفر دانش آموز یا یک نفر

دانش آموز یا اصلاً دانش آموز انتخاب نکند. در این قسمت، فقط

حالتی که هر سه نفر دانش آموز باشند، در نظر گرفته نشده است؛

بنابراین می توان نوشت: