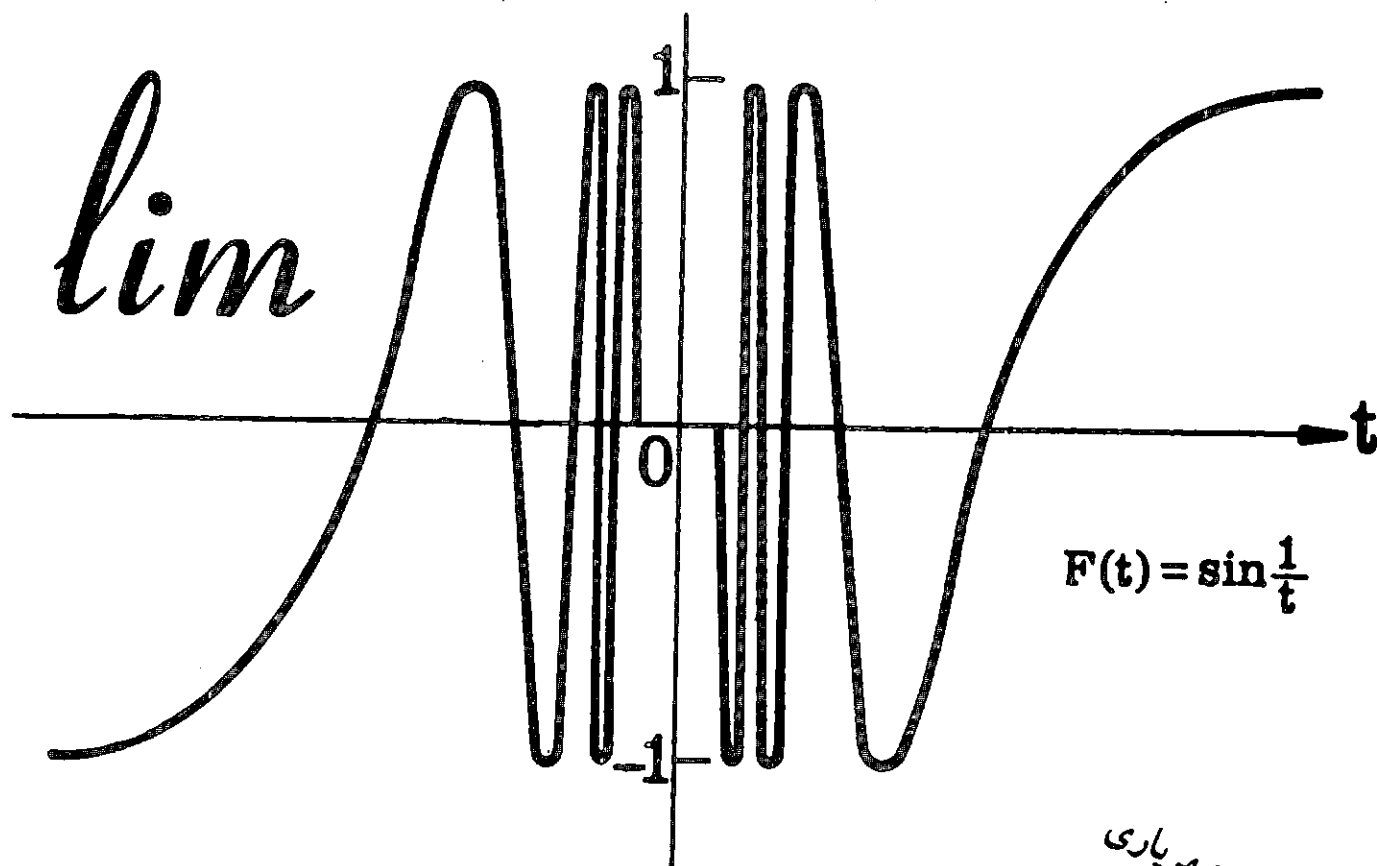




● پرویز شهریاری

آموزش مفهوم حد در دبیرستان

آورد. جمشید کاشانی هم در کتاب «رسالة المحيطیه» همین راه را دنبال می‌کند؛ و 3×2^n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کره زمین باشد، اختلاف بین محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد؛ در این صورت تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی برابر 805306368 می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

کاشانی، محیط دایره را برابر با میانگین حسابی محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی به حساب می‌آورد و، سپس، با تقسیم بر قطر دایره، عدد π را محاسبه می‌کند. روش کاشانی را برای $n=0$ ، $n=1$ و $n=2$ دنبال کنیم.

برای $n=0$ با مثلثهای متساوی‌الاضلاع درونی و بیرونی سرو کار داریم. اگر شعاع دایره را برابر واحد فرض کنیم، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن برابر $\sqrt{3}$ یا به تقریب

از زمانی که محاسبه محیط و مساحت دایره، جسم دوار مفهوم عددهای گنگ وارد برنامه ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آنها، داوری درباره بی‌نهایت کوچکها و روندهای بی‌پایانی که تا بی‌نهایت ادامه دارد مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهومیهای دقیق دانش و استدلالی کردن آنها، جز بر پایه آنالیز ریاضی ممکن نیست. به همین مناسبت، مفهوم حد و روشهای حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهومیهای مربوط به آن دشواریهای پدید می‌آید، خود را وارد کتابهای درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به ویژه در رابطه با محاسبه نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبه عدد π) و محاسبه سطح و حجم جسمهای دوار از مفهوم حد، بدون این که نامی از آن برده شود و بدون این که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. ارشمیدس که در سده سوم پیش از میلاد می‌زیست، به جای محیط دایره، محیط چندضلعیهای منتظم محاط در دایره و محیط بردایره را در نظر گرفت و حد π را به تقریب برابر با $\frac{1}{3}$ به دست

AMB انجام دادیم. مجموع مساحت‌های مثلث‌های AKC, ACB و CPB از مساحت قطعه سهمی کمتر است و چهار قطعه سهمی باقی می‌ماند؛ که باید مساحت آنها به مساحت سه مثلث اضافه شود. در این چهار قطعه سهمی هم، همان عمل قبلی را انجام می‌دهیم و چهار مثلث جدید به دست می‌آوریم. اگر این روند را ادامه دهیم، به تدریج مجموع مساحت‌های مثلث‌های حاصل، به مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود و، در حد مساحت قطعه سهمی را به ما می‌دهد. ارشمیدس ثابت می‌کند، مساحت مثلث ACB چهار برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث AKC و CPB است و محیط درباره مثلث‌های بعدی. به این ترتیب، ارشمیدس، برای مساحت قطعه سهمی به دست می‌آورد.

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{64}S + \dots = \frac{4}{3}S$$

که در آن، S مساحت مثلث ACB است.

همه این کارها بسیار جالب است، ولی از دو جهت دارای کمبود هستند: (۱) چه پیش می‌آید که با در نظر گرفتن بی‌نهایت جمله، به نتیجه می‌رسیم؟ در اینجا کدام خصلت فلسفی و منطقی وجود دارد؟ (۲) در استدلال‌ها دقت منطقی لازم به کار نرفته است و در بخشی از کار به معرفت شهودی متوسل شده‌اند. به زبان روشن‌تر، قانون‌های حاکم بر این گونه عمل‌ها تنظیم نشده بود.

برطرف کردن این کمبودها که بیشتر دارای جنبه فلسفی بود، نیاز به دگرگونی در اندیشه اجتماعی و فلسفی در محیط‌های روشنفکری داشت و این زمینه را انقلاب کبیر فرانسه فراهم کرد. از یک طرف به دقت در کار اهمیت داده شد، به نحوی که از هیچ مقوله‌ای بدون استدلال و اثبات کامل نگذردند و از طرف دیگر، دیدگاه نسبت به تغییرهای کمی و مکانیکی عوض شد و خود انقلاب آموخت که هر تغییر کمی، در مرحله‌ای از حرکت خود منجر به تغییر کیفی می‌شود و نتیجه‌ای به بار می‌آورد که شبیه گذشته خود نیست.



هنوز بسیاری از پژوهشگران و از جمله بسیاری از نویسندگان تاریخ ریاضیات، بر این عقیده‌اند که اندیشه مربوط به نظریه حد، از آغاز سده نوزدهم میلادی در کتابهای درسی دبیرستانی وارد شده است. ولی در واقع چنین نیست.

درست است که نماد «Lim» یا «حد» در سال ۱۸۵۳ یعنی در نیمه سده نوزدهم و به وسیله «ویلیام هامیلتون» ریاضی‌دان و

۱/۷۳۲ و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر $2\sqrt{3}$ و یا به تقریب ۳/۴۶۴ می‌شود. اگر محیط دایره را میانگین حسابی محیط‌های دو مثلث بگیریم:

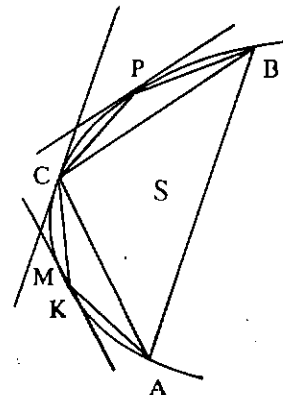
$$\frac{3 \times 1/732 + 3 \times 3/464}{2} = 7/794 \approx \text{محیط دایره}$$

که اگر به قطر دایره، یعنی ۲، تقسیم کنیم، به عدد ۳/۸۹۷ برای عدد π می‌رسیم که از حقیقت دور است.

برای $n=1$ یعنی ۶ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، محیط ۶ ضلعی محاطی برابر ۶ و محیط شش ضلعی محیطی برابر ۶/۹۲۸ و محیط دایره به تقریب برابر ۶/۴۶۴ به دست می‌آید که با تقسیم بر ۲ (قطر دایره) مقدار تقریبی π برابر ۳/۲۳۲ می‌شود که گرچه نسبت به مقدار قبلی دقیق‌تر است، هنوز با π فاصله دارد.

برای $n=2$ یعنی ۱۲ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، میانگین محیط‌های دو چند ضلعی برابر ۶/۳۷۰۴ و برابر π ، عدد ۳/۱۸۵۲ به دست می‌آید. می‌بینید هر چه n را بزرگتر کنیم، به مقدار عدد π نزدیکتر می‌شویم.

ارشمیدس از این هم جلوتر می‌رود و مساحت قطعه سهمی را با همین روش حدی محاسبه می‌کند. ارشمیدس، این محاسبه را در رساله خود به نام «مربع در آوردن سهمی» انجام داده است.



روش ارشمیدس را می‌توان به صورت کوتاه، این‌طور بیان کرد. فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را پیدا کنیم، یعنی مساحت شکلی که بین منحنی سهمی و وتر AB واقع است (شکل را ببینید). مناسبی بر سهمی رسم می‌کنیم که موازی وتر سهمی باشد و، سپس، از نقطه تماس C به A و B وصل می‌کنیم تا مثلث ACB به دست آید. در قطعه سهمی‌های تازه AKC و CPB، همان کاری را دنبال می‌کنیم که در قطعه سهمی

«مقدمات حساب و هندسه برای دبیرستانها»، در ورشو و در سال ۱۷۷۸ چاپ شد خود لیوویل به لهستان دعوت شد و در آنجا به عنوان کتابدار و مربی پسر شاهزاده چرتورسکی (عضو کمیسیون آموزش) مشغول به کار شد. خیلی زود، ترجمه لهستانی کتاب لیوویل هم منتشر شد. ترجمه کتاب را آندره‌ها ورونسکی یکی از فعالان تهیه اصطلاح‌های ریاضی در زبان لهستان به عهده گرفت. کتاب درسی حساب در سال ۱۷۷۸ چاپ شد. بعد از دو سال، جلد‌های اول و دوم کتاب درسی هندسه و در سال ۱۷۸۲ کتاب درسی جبر چاپ شد. کتاب حساب ۱۲ بار، هندسه‌ها ۴ بار و جبر ۳ بار تجدید چاپ شدند.

در این‌جا، کتابهای جبر و هندسه لیوویل را از دیدگاه روش استفاده از نظریه حد بررسی می‌کنیم. کتاب هندسه او تفاوت‌هایی جدی با دستگاه اقلیدسی دارد. بررسی شکل‌های متشابه قبل از نسبت‌ها و مثلثات قبل از لگاریتم آمده است. در جلد دوم از توان سوم و ریشه سوم عددها صحبت شده است. مؤلف، توجه زیادی به حل مسأله‌های عملی کرده است. در فصل ۱۱ جلد اول مقدمات «زمین‌سنجی» آمده است. در فصل ۱۲، از کاربرد مثلثات در محاسبه‌های مختلف مربوط به زمین‌گفتگو کرده است.

لیوویل در کتاب خود، هر جا که توانسته است از مفهوم حد استفاده کرده است. از این دیدگاه، فصل ۱۳ بسیار جالب است. عنوان این فصل چنین است: «به مربع در آوردن دایره یا پیدا کردن مساحت دایره». لیوویل در آغاز می‌گوید: هر چه تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم بیشتر باشد، به دایره شبیه‌تر می‌شوند و نسبت محیطهای آنها، به نسبت شعاع دایره‌های محاطی یا محیطی نزدیک‌تر می‌شود. این قضیه وقتی درست است که به قول لیوویل، «تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم آن قدر زیاد باشد که تشخیص آنها از دایره ممکن نباشد، در چنین وضعی، بین شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی، نمی‌توان تفاوتی قائل شد و در واقع، یک شعاع دارند». این استدلال، برخی هندسه‌دانها را قانع کرد که اگر اثبات و استدلالی برای چند ضلعی منتظم درست باشد، برای دایره هم درست است، به شرطی که دایره را همچون چند ضلعی منتظمی در نظر بگیرند که «در آن تعداد ضلعها، از هر عددی بزرگتر باشد» به عقیده لیوویل، چنین استدلالهایی نمی‌تواند برای دانش‌آموزان قانع‌کننده باشد: «آنها باید توجه کنند که در این‌جا یک پرسش وجود دارد؛ زیرا اگر با دقت ارزیابی کنیم، منحنی را نمی‌توان

فیزیکدان ایرلندی وارد در ریاضیات و به تدریج معمول شد، ولی خود مفهوم حد، از خیلی پیش از آن در کتابهای درسی دبیرستانی مورد استفاده قرار می‌گرفت.

در واقع ژان دالامبر (Dalembert) فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی (۱۷۱۷ - ۱۷۷۸ میلادی)، نظریه حد را، که خود در تکامل آن نقش داشت، در کتاب فرهنگ بزرگ خود (درباره دانش و هنر و پیشه)، که در فاصله سال‌های ۱۷۵۱ تا ۱۷۷۱ میلادی در پاریس چاپ شد، تعریف کرد، تعریف دالامبر از مفهوم حد چنین است:

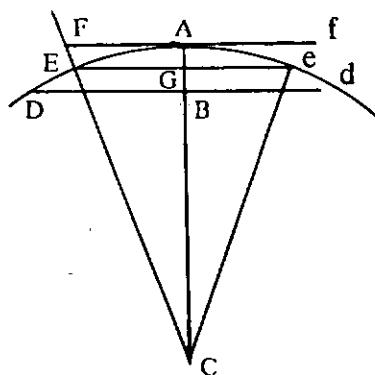
«هنگامی کمیتی را حد کمیت دیگر می‌گوییم، که کمیت دوم بتواند به کمیت اول چنان نزدیک شود که فاصله‌اش از آن از هر مقدار مفروضی، هر قدر کوچک و ناچیز، کمتر باشد، در ضمن، کمیت نزدیک شونده به هیچ وجه نباید از کمیتی که به آن نزدیک می‌شود تجاوز کند. بنابراین، اختلاف بین این کمیت و کمیت حدی آن، مقداری نامعین است».

و روشن است که این تعریف مربوط به کمیت‌های صعودی و یکنواخت است.

نوشته‌های دالامبر، از همان زمان انتشار، در کتاب درسی ریاضیات دبیرستانی نفوذ کرد. یکی از این کتابها، کتاب درسی سیمون لیوویل، برای دبیرستان است.

در تاریخ ریاضیات، نام سیمون لیوویل (S.L. Huillier)؛ ۱۷۵۰ - ۱۸۴۰ میلادی) ریاضیدان سوئسی، به خساطر نتیجه‌گیری دقیق علمی خود، شهرت دارد. بین کارهای او می‌توان از پایه‌گذاری آنالیز ریاضی براساس مفهوم حد نام برد. نوشته لیوویل با عنوان «طرح مقدماتی محاسبه عالی» که در سال ۱۷۸۶ در برلن چاپ شد، در مسابقه‌ای که از طرف، فرهنگستان علوم برلن ترتیب داده شده بود، بهترین شناخته شد. در آن زمان، لاگراژ ریاضیدان فرانسوی (۱۷۳۶ - ۱۸۱۳) رئیس فرهنگستان علوم برلن بود. فعالیت علمی لیوویل و هم کتابهای او با سفارش‌های آموزشی همراه است.

در سال ۱۷۷۳، در لهستان «اداره آموزش» بنیان گذاشته شد. هدف و برنامه این اداره، فعال کردن آموزش در دبیرستانها بود. در این اداره، بخش کتابخانه ایجاد شد که وظیفه‌اش چاپ کتاب‌های درسی به زبان مادری بود. در ضمن، مسابقه‌ای برای تنظیم کتابهای درسی دبیرستانی ترتیب داده شد.... و سیمون لیوویل برنده کتابهای درسی ریاضیات دبیرستانی شد. کتاب او



C مرکز دایره‌ای است
که کمان DAd
از آن است

می‌کنیم تا محیط دایره را در D و d قطع کند. سپس محیط دایره را به ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا جایی که هر بخش از کمان DAd کوچکتر شود. فرض کنید، کمان EAe یکی از این بخشها باشد و فرض کنید کمان EA = Ae. پاره خط راست Ee را رسم می‌کنیم که البته، بر AC عمود می‌شود. CE و Ce را ادامه می‌دهیم تا مماس بر دایره در نقطه A را در نقطه‌های F و f قطع کند در این صورت Ee و Ff عبارتند از ضلعهای چندضلعیهای منتظم متشابه که اولی در دایره محاط و دومی بر دایره محیط است. محیط این چند ضلعیها را p و P می‌نامیم، در این صورت

$$\frac{P}{P} = \frac{|CG|}{|AC|} \Rightarrow \frac{P-p}{P} = \frac{|AC|-|CG|}{|AC|}$$

$$\text{و } |AC|-|CG|=|AG| \text{ ولی}$$

$$|AG| < |AB| = \frac{1}{10} |AC|$$

بنابراین

$$\frac{P-p}{P} < \frac{1}{10} \Rightarrow P-p < \frac{1}{10} P$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$P-p < \frac{1}{10} P$$

مؤلف در یادداشت خود می‌نویسد: «مثال عددی را به این دلیل آوردم که دانش‌آموزان مطلب را بهتر درک کنند، ولی این مثال نمی‌تواند اثباتی کلی و دقیق به حساب آید، زیرا استدلال نباید به عدد نشان شده (در این مثال، عدد $\frac{1}{10}$) بستگی داشته باشد، سپس دو نتیجه، از این قضیه به دست می‌آورد:

۱. می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی محاط دایره و دیگری محیط بر دایره چنان رسم کرد که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از آنها، از هر عدد نشان شده قبلی کوچکتر

همچون مجموعه‌ای از تعداد بسیاری پاره خط‌های راست بسیار کوچک دانست که با هم زاویه می‌سازند». باید مسأله را دقیق‌تر مطرح کرد و این ممکن نیست، مگر به یاری مفهوم حد. آن چه مربوط به «پرسش»، ضمن عبور از چند ضلعی به دایره می‌شود، ما را وامی‌دارد تا به تصور عمیق‌تری که لیوویل درباره «عبور» داشته است پی‌بیریم. در واقع، در این جا با تغییری کیفی سرو کار داریم که بعد از یک جریان مداوم تغییرهای کمی پدید آمده است. باید توجه داشت که بسیاری از مؤلفان کتابهای درسی هندسه از این مفهوم عمیق لیوویل (یعنی تغییر کیفی، در نتیجه یک رشته تغییرهای کمی) استفاده نکرده‌اند.

لیوویل، طرح خود را با یک پیش قضیه آغاز می‌کند. «همیشه می‌توان - گرچه در ذهن - یک کمیت را به چنان بخشهای برابری تقسیم کرد که هر کدام از آنها به تنهایی از هر کمیت شناخته شده‌ای کوچکتر باشد. لیوویل، این کمیت را کمیت مفروض می‌نامد. فرض کنید بخواهیم کمیت A را چنان به بخشهای برابر تقسیم کنیم که هر کدام از آنها از کمیت مفروض α کوچکتر باشد، عددی پیدا می‌کنیم که از ضرب آن در α ، عددی بزرگتر از A به دست آید. فرض کنید این عدد n باشد، یعنی $n\alpha > A$. اگر دو طرف این برابری را بر n تقسیم کنیم، به دست می‌آید: $\frac{A}{n} < \alpha$ ، همان که می‌خواستیم.

برای مثال فرض کنید کمیتی را به دو بخش برابر تقسیم کنیم، هر بخش را دوباره به دو بخش و غیره؛ و از این راه به بخشی برسیم که از هر مقدار مفروضی که در نظر گرفته‌ایم، کمتر باشد. مؤلف؛ معلم را راهنمایی می‌کند که توجه دانش‌آموز را به این مقدار مفروض (که آن را کمیت نشان شده می‌نامد) جلب کند. این یادآوری مؤلف برای ما اهمیت دارد، زیرا به درک امروزی ما از مفهوم حد (که نقش مقدار مفروض را به اپسیلون می‌دهیم) بسیار نزدیک است.

سپس مؤلف، این قضیه را تنظیم و اثبات می‌کند: «می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی را بر دایره محیط و دیگری را در دایره محاط کرد، به نحوی که اختلاف محیطهای آنها، از هر عددی که از قبل نشان شده است، کمتر باشد. مثلاً می‌توان چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی را طوری انتخاب کرد که اختلاف محیطهای آنها، از $\frac{1}{10}$ محیط هر یک از چندضلعیها کمتر باشد». و آن را به این ترتیب ثابت می‌کند.

فرض کنید شعاع دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم کنیم و AB یکی از این بخشها باشد. از نقطه B عمودی بر شعاع رسم

ارتفاع آن برابر با طول شعاع دایره و قاعده آن، طولی برابر محیط دایره داشته باشد.

اگر مساحت دایره، برابر مساحت این مثلث نباشد، باید از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر شود؛ یعنی مساحت دایره برابر با مساحت مثلثی می‌شود که ارتفاع آن طولی برابر با شعاع دایره و قاعده‌اش طولی بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره داشته باشد. فرض کنید طول محیط دایره برابر O و L طول پاره خط راستی باشد، بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره، فرض کنید O کوچکتر از L باشد. چندضلعی منتظم محیطی را در نظر می‌گیریم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کوچکتر از اختلاف محیط دایره از L باشد.

$$P - O < L - O$$

یعنی $L > P$ و این به معنای آن است که مساحت چند - ضلعی محیطی کوچکتر از مساحت دایره‌ای است که در آن محاط شده است. و این ممکن نیست.

اگر محیط دایره بزرگتر از طول پاره خط راست L باشد، در دایره چندضلعی منتظمی محاط می‌کنیم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کمتر از اختلاف محیط دایره از L باشد. در این صورت $O - p < O - L \Rightarrow p > L$ یعنی مساحت چند ضلعی محاط در دایره بیشتر از مساحت دایره می‌شود؛ که ممکن نیست.

به این ترتیب، مساحت دایره از مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر شعاع دایره و قاعده‌اش برابر محیط دایره باشد، نه بزرگتر است و نه کوچکتر، یعنی مساحت آن با مساحت دایره برابر است.

در این جا، استدلال لیوویل، اختلاف کمی با استدلال ارشمیدس در کتاب «اندازه گیری دایره» و استدلال جمشید کاشانی در «رساله‌المحیطه» دارد.

لیوویل، حجم استوانه، مخروط و کره را به عنوان حد حجم منشور، هرم و چند وجهی منتظمی که در آنها محاط یا بر آنها محیط شده باشد، به دست می‌آورد.

در سال ۱۷۹۸ کتاب «تجربه‌هایی درباره تکمیل مقدمات هندسه» تألیف س. گوریووا منتشر شد. این کتاب هم بر پایه مفهوم حد و روش حدی تنظیم شده بود، اهمیت استدلال‌های گوریووا با استدلال‌های لیوویل، چندان تفاوتی ندارد، ولی به هر حال با آن متفاوت است.

لیوویل و گوریووا، برای حل بسیاری از مسأله‌ها، از این

باشد. ۱ را محیط دایره بگیرید و فرض کنید:

$$P - p < \frac{1}{10} p, \quad P - l < P - p$$

یعنی $P - l < \frac{1}{10} p$ ، ولی $l > p$ پس $P - l < \frac{1}{10} p$.

۲. فرض کنیم، محیط دایره را به صورت یک پاره خط راست نشان داده باشیم. می‌توان در دایره یک چندضلعی منتظم محاط و چند ضلعی متشابه آن را بر دایره محیط کرد، به نحوی که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها، از طول پاره خط راستی که به اندازه کافی کوچک باشند، کمتر شود.

α را پاره خطی راست با طولی به دلخواه کوچک، می‌گیریم. $|AB| = l$. فرض کنید.

$$10\alpha > |AB|, \quad \alpha > \frac{|AB|}{10} = \frac{l}{10}$$

دو چند ضلعی منتظم متشابه یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر دایره رسم کنیم، به نحوی که داشته باشیم:

$P - p < \frac{1}{10} p$ ، آن وقت خواهیم داشت: $P - l < \frac{1}{10} p$ و به طور مسلم $|AB| = \frac{1}{10} l$ ، ولی $\alpha > \frac{1}{10} l$ ، بنابراین $P - l < \alpha$.

وقتی تعداد ضلعیهای چند ضلعیهای منتظم را ۲ برابر و ۴ برابر کنیم، محیط چند ضلعی محیطی کوچکتر و محیط چندضلعی محاطی بزرگتر می‌شود، ولی محیط دایره مقداری ثابت است. بنابراین اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها را می‌توان از هر عدد α ، که از قبل و به اندازه کافی کوچک انتخاب شده است، کوچکتر گرفت به این ترتیب، محیط دایره، برابر است با حد محیطهای چند ضلعیهای محاطی و محیطی، به شرطی که تعداد ضلعیهای آنها، پشت سرهم دو برابر شود.

سپس، مؤلف، قضیه دوم را ثابت می‌کند: «نسبت محیطهای دو دایره، مثل نسبت شعاعهای آنهاست. و از آن دو نتیجه می‌گیرد:

۱. نسبت محیط دایره به شعاع آن، مقدار ثابتی است که به اندازه محیط دایره بستگی ندارد.

۲. نسبت مساحتیهای دو مثلث راست گوشه‌ای که ارتفاع آنها برابر شعاع دو دایره و قاعده‌های آنها، پاره خطهای راستی با طول محیطهای دو دایره باشند، برابر است با نسبت مجذورهای دو شعاع.

قضیه. مساحت دایره، برابر است با مساحت مثلثی که

او برای محاسبه مجموع همه جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی (که بی‌نهایت جمله دارد)، از همین روش استفاده می‌کند لیوویل با در دست داشتن

$$S = \frac{1-a^n}{1-a}$$

می‌نویسد $S = \frac{1}{1-a} - \frac{a^n}{1-a}$ و نشان می‌دهد که، برای $0 < a < 1$ ، کسر دوم با بزرگ شدن n ، کوچک می‌شود و می‌تواند از هر مقدار کوچک دلخواه از قبل تعیین شده‌ای، کوچکتر باشد. بنابراین $\frac{1}{1-a}$ حد مجموع همه جمله‌های تصاعد هندسی نزولی است.

لیوویل، با استفاده از مجموع جمله‌های تصاعد نزولی، مجموع جمله‌های چند رشته‌ای را محاسبه می‌کند. از جمله:

$$S' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} \quad (1)$$

دو طرف برابری (۱) را در x ضرب می‌کند:

$$S'x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \\ + (n-1)x^{n-1} + nx^n \quad (2)$$

سپس، با کم کردن (۲) از (۱) به دست می‌آورد

$$S'(1-x) = [1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}] - nx^n \\ = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

از آنجا

$$S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

اگر $x < 1$ ، آن وقت کسرهای $\frac{nx^n}{1-x}$ و $\frac{x^n}{(1-x)^2}$ با بزرگ شدن n ، کوچک می‌شوند، به نحوی که می‌توان n را طوری انتخاب کرد که این دو کسر از هر عدد کوچک از پیش تعیین شده‌ای کوچکتر باشند، بنابراین برای حد مجموع داریم:

$$S' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

با استفاده از این نتیجه، و با همان روش می‌توان حد مجموع

$$S'' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} x^{n-1}$$

را به دست آورد؛ که برابر است با $\frac{1}{(1-x)^3}$.

در واقع S' و S'' نتیجه‌ای از مشتق S نسبت به x هستند.

قضیه استفاده می‌کنند که اگر مقدار ثابت A ، بین دو مقدار متغیر x و y باشد: $x < A < y$ ، و اختلاف بین x و y را بتوان از هر مقدار به دلخواه کوچکی که از قبل معین شده است را کمتر کرد، آن وقت مقدار ثابت A برابر است با حد مشترک x و y :

$$\text{حد } x = \text{حد } y = A$$

لازم به یادآوری است که هواداران روش حدی، یعنی لیوویل و گوریه‌وا، به آموزش هندسه با دو دید مختلف می‌نگریستند. گوریه‌وا، هندسه را دانشی مستقل از حساب و جبر می‌دانست و به کار بردن حساب و جبر را در آن ضروری نمی‌دید. او می‌نویسد: «... در هندسه مقدماتی، به هیچ وجه نباید از ریاضیات محاسبه‌ای استفاده کرد...».

لیوویل، برعکس، هوادار محکم کردن بستگی بین رشته‌های مختلف ریاضیات بود و در هندسه، به فراوانی از حساب و جبر استفاده می‌کرد. جلد اول کتاب درسی جبر او شامل ۸ فصل است که در آنها معادله‌های درجه اول یک یا چند مجهولی را بررسی کرده است؛ همچنین ریشه گرفتن، کمتهای اندازه‌ناپذیر، معادله‌های درجه دوم و اندکی مقوله دیوفانتی، در آن مطرح شده است. در ۱۴ فصل جلد دوم، به تصاعدهای عددی، عددهای چندضلعی، ترکیب و تبدیل، بسط دوجمله‌ای با توان طبیعی، تصاعد هندسی و لگاریتم روش ضرب‌های نامعین، کسرهای مسلسل، تشکیل معادله با در دست داشتن ریشه‌های آن در معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم آمده است. در این جا هم، لیوویل مثل کتاب هندسه خود از روش حدی استفاده می‌کند و ضمن طرح $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n+1}$ می‌نویسد: «به نظر من همه دشواری، مربوط به اندیشه تقسیم است». لیوویل تعریف حد را، ضمن محاسبه حد کسرها می‌دهد و می‌نویسد: «وقتی اختلاف دو کمیت، معین یا مفروض باشد، نسبت آنها برابر واحد نمی‌شود. ولی هر قدر این اختلاف، نسبت به هر یک از دو عدد کمتر باشد و هر قدر خود دو عدد بزرگتر باشند، نسبت آنها به واحد نزدیکتر می‌شود و اختلاف این نسبت با واحد، می‌تواند از هر عدد کوچک دلخواه، کمتر باشد، در این صورت، عدد ۱ حد این نسبت است».

در فصل عددهای چندضلعی، حد نسبت $\frac{3}{n+2}$ را بررسی می‌کند. او این نسبت را به صورت $2 - \frac{3}{n+2}$ نشان می‌دهد و،

سپس به سمت مقدار حدی می‌رود:

$$\text{حد} \left(2 - \frac{3}{n+2} \right) = 2$$