

آموزش ترجمه متون ریاضی (۶)

● حمید رضا امیری

دنباله (۵.۲) را می توان به صورت

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots \quad (5.3)$$

نوشت که سه نقطه به معنی نامحدود بودن جملات است. این دنباله دارای تعدادی نامتناهی جمله است و یک دنباله نامتناهی نامیده می شود.

To define a sequence we require:

- (i) the first term,
- (ii) the number of terms,
- (iii) the law (formula) by which the terms can be calculated.

The first term of a sequence is usually denoted by u_1 and the general term by u_r . Thus, sequence (5.1) is defined by $u_1 = 2$ and $u_r = 2r$. Since this is a finite sequence, the only values of r are 1, 2, 3, 4, 5. We define sequence (5.2) by $u_1 = 1$ and $u_r = r^2$. There is now no restriction on r , so that $r = 1, 2, 3, \dots$

برای مشخص کردن (یا تعریف) یک دنباله به اطلاعات زیر

نیازمندیم:

(۱) جمله اول.

(۲) تعداد جمله ها.

(۳) قاعده ای (فرمولی) که توسط آن جمله ها قابل مقابله باشند.

جمله اول یک دنباله معمولاً با نماد u_1 و جمله عمومی آن با u_n

نمایش داده می شود. بنابراین دنباله (۵.۱) توسط $u_1 = 2$ و $u_r = 2r$

مشخص می شود. از طرفی چون این دنباله یک دنباله متناهی است،

تنها مقادیر برای r عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵. دنباله (۵.۲) را

توسط $u_1 = 1$ و $u_r = r^2$ مشخص می کنیم. در این دنباله

محدودیتی برای r وجود نداشته، به طوری که، $r = 1, 2, 3, \dots$

Example 1 The general term u_r of a sequence is of the form $u_r = ar + b$, where a and b are constants. Given that $u_1 = 5$ and $u_3 = 11$, find a and b and show that $u_9 = 29$.

5 Sequences and series

۵. دنباله ها و سری ها

5.1 Sequences

Consider the following sets of numbers

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad (5.1)$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots \quad (5.2)$$

These are examples of *sequences* of numbers. In any sequence the numbers appear in a given order and, further, there is usually a definite law relating each member to other members. Each member is called a *term* of the sequence.

۵.۱ دنباله ها

رشته های اعداد زیر را در نظر می گیریم:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad (5.1)$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots \quad (5.2)$$

اینها مثالهایی هستند از دنباله هایی از اعداد. در هر دنباله از اعداد یک ترتیب خاصی وجود دارد و علاوه بر آن، هر عضو معمولاً بایک قاعده مشخصی به اعضای دیگر مربوط است. هر عضو یک جمله از دنباله نامیده می شود.

The sequence (5.1) has just five terms and is an example of a *finite* sequence.

The sequence (5.2) may be written

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots \quad (5.3)$$

where ... means 'and so on without limit'. This sequence has an infinite number of terms and is called an *infinite* sequence.

دنباله (۵.۱) دقیقاً دارای پنج جمله می باشد و مثالی از یک دنباله

متناهی است.

۵.۲ سریها

وقتی که جملات یک دنباله را بایکدیگر جمع کنیم یک سری حاصل می شود. برای مثال دنباله (۵.۱) سری زیر را به ما می دهد.

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 \quad (5.4)$$

که این مثالی از یک سری متناهی است.

دنباله (۵.۲) سری زیر را حاصل می کند، که این سری مثالی از یک سری نامتناهی است:

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots \quad (5.5)$$

مادر حالت کلی از دنباله متناهی $u_1, u_2, \dots, u_n$ ، سری زیر را می توانیم داشته باشیم:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (5.6)$$

با استفاده از نماد سیگما امکان این هست که این سری را بتوان به صورت زیر نوشت. به جای سری (۵.۶) می نویسیم:

$$\sum_{r=1}^n u_r \quad (5.7)$$

The symbol Σ is a form of the Greek capital letter sigma, which corresponds to S, the first letter of the word 'sum'. In words, expression (5.7) reads 'sigma, r equals 1 to n , of u_r '. The word 'sigma' may be replaced by 'sum'. The expression indicates that a summation is to be carried out, the terms to be added being the u_r , where r is a counter which takes consecutive integral values from 1 to n . The lower limit of the sum is always written below the Σ and the upper limit above. Expression (5.7) is sometimes even further abbreviated to

$$\sum_{r=1}^n u_r$$

نماد Σ یکی از حروف بزرگ یونانی است، و متناظر با S می باشد که S اولین حرف کلمه sum است (به معنی جمع). عبارت (۵.۷) به صورت «سیگما r مساوی با یک تا n از u_r » خوانده می شود. کلمه سیگما ممکن است به جای جمع بکار گرفته شود. عبارت (۵.۷) نشان می دهد که یک عمل جمع انجام پذیرفته است به صورتی که، وقتی r به طور متوالی اعداد صحیح ۱ تا n را می پذیرد، جملات توسط u_r باهم جمع می شوند.

$$(u_1 = 5) \Rightarrow (a + b = 5),$$

$$(u_3 = 11) \Rightarrow (3a + b = 11).$$

Solving these simultaneous equations, we obtain

$$(a = 3, \text{ and } b = 2) \Rightarrow (u_r = 3r + 2).$$

Substituting $r = 9$, we obtain $u_9 = 29$.

مثال ۱: جمله عمومی دنباله ای به صورت $u_r = ar + b$ می باشد که a و b اعداد ثابت هستند. اگر فرض کنیم $u_1 = 5$ و $u_3 = 11$ ، در این صورت مقادیر a و b را یافته و نشان دهید که $u_9 = 29$.

$$(u_1 = 5) \Rightarrow (a + b = 5)$$

$$(u_3 = 11) \Rightarrow (3a + b = 11)$$

از حل این دستگاه معادلات، خواهیم داشت:

$$(a = 3, \text{ } b = 2) \Rightarrow u_r = 3r + 2.$$

با قرار دادن $r = 9$ ، $u_9 = 29$ به دست می آید.

Example 2 Write down the first five terms of the sequence in which the general term is given by $u_r = 2^r$.

$$u_1 = 2^1 = 2, u_2 = 2^2 = 4, u_3 = 2^3 = 8, u_4 = 2^4 = 16, u_5 = 2^5 = 32.$$

مثال ۲: اولین پنج جمله دنباله زیر که با جمله عمومی $u_r = 2^r$ مشخص شده است را بنویسید.

$$u_1 = 2^1 = 2, u_2 = 2^2 = 4, u_3 = 2^3 = 8, u_4 = 2^4 = 16,$$

$$u_5 = 2^5 = 32$$

5.2 Series

When the terms of a sequence are added together, we obtain a *series*. For example, sequence (5.1) gives the series

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10, \quad (5.4)$$

which is an example of a *finite series*.

Sequence (5.2) gives the series

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots \quad (5.5)$$

This is an example of an *infinite series*.

From the general finite sequence $u_1, u_2, \dots, u_n$ we obtain the series

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n. \quad (5.6)$$

This series may be written in a more concise form, using what is known as the '*sigma notation*'. Instead of sequence (5.6) we write

$$\sum_{r=1}^n u_r. \quad (5.7)$$

[یادآوری می‌کنیم که، $r! = r(r-1)(r-2) \dots 2 \times 1$]

توجه دارید که در قسمت (ب) و (ج) ما به ترتیب از $\sum_{r=2}^{\infty}$ و $\sum_{r=1}^{\infty}$ استفاده کردیم.

Example 4 Write the following series in sigma notation:

(a) $1 - a + a^2 - a^3$,

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$.

(a) We note that the general term is of the form $\pm a^r$, with a positive sign when r is even (we regard $r=0$ as even) and a negative sign when r is odd. The four terms correspond to $r=0, 1, 2, 3$. Hence, we have

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^3 (-1)^r a^r.$$

Check that

$$\sum_{r=1}^4 (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

is an equivalent expression.

مثال ۴: سریهای زیر را به صورت نماد سیگما نمایش دهید:

الف) $1 - a + a^2 - a^3$

ب) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

الف) ما توجه داریم که جمله عمومی به شکل $\pm a^r$ است، که وقتی r زوج است علامت آن مثبت (ما صفر را مثبت در نظر می‌گیریم) و زمانی که r فرد است علامت آن منفی می‌باشد. چهار جمله فوق متناظر با $r=0, 1, 2, 3$ است. بنابراین داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^3 (-1)^r a^r$$

و یا اینکه به صورت دیگری داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=1}^4 (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

(b) We first notice that the series may be written

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}.$$

ب) ما ابتدا سری را به شکل دیگری که امکان پذیر است نشان می‌دهیم یعنی:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}$$

معمولاً حد پایینی جمع را در پایین $\sum$ و حد بالایی را در بالای آن قرار می‌دهیم. عبارت (۵.۷) حتی گاهی اوقات برای مختصر نویسی به صورت $\sum_{r=1}^n u_r$ نوشته می‌شود.

Example 3 Write out explicitly the series

(a) $\sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r}$, (b) $\sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1)$, (c) $\sum_{r=2}^4 r!$.

(a) $\sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

(b) $\sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 1 \times 2 + (-1)^3 2 \times 3 + (-1)^4 3 \times 4 + (-1)^5 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20$.

(c) $\sum_{r=2}^4 r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24$.

[Remember that $r!$ denotes $r(r-1)(r-2) \dots 2.1$.]

Note that in (b) and (c) we have $\sum_{r=0}^4$ and $\sum_{r=2}^4$, respectively.

مثال ۳: سریهای زیر را به شکل صریح (باز شده) بنویسید:

الف) $\sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r}$

ب) $\sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1)$

ج) $\sum_{r=2}^4 r!$

الف) $\sum_{r=1}^4 \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

ب) $\sum_{r=0}^4 (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 \times 1 \times 2 + (-1)^3 \times 2 \times 3 + (-1)^4 \times 3 \times 4 + (-1)^5 \times 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20$

ج) $\sum_{r=2}^4 r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24$

The second numbers of the pairs are 4, 7, 10, 13, again differing by 3. Proceeding as above, we find these are obtained from $(3r + 1)$ by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$.

The general term in the series is $(3r - 2)(3r + 1)$ and, hence, the series may be written

$$\sum_{r=1}^4 (3r - 2)(3r + 1).$$

دومین عددهای زوجهای فوق عبارتند از ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ که دوباره دارای تفاضلی برابر با ۳ می‌باشند. باقدامی مشابه فوق برای ما شکل $(3r + 1)$ حاصل می‌شود که با جایگذاری $r = 1, 2, 3, 4$ اعداد فوق به دست می‌آیند.

جمله عمومی سری $(3r + 1)(3r - 2)$ می‌باشد و بنابراین، سری می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\sum_{r=1}^4 (3r - 2)(3r + 1)$$

5.3 Arithmetic progressions (APs)

The sequence 2, 5, 8, 11, ..., 26 is such that each term may be obtained from the previous one by adding a constant, in this case 3. Such a sequence is called an *arithmetic progression*, or AP. In general, if the first term of such a progression is a and a given term differs from the previous one by d , usually called the *common difference*, then the first n terms of the progression are

$$a, (a + d), (a + 2d), \dots, [a + (n - 1)d]. \quad (5.8)$$

The common difference d may be positive or negative.

۵.۳ تصاعدهای عددی (APS)

دنباله ۲، ۵، ۸، ۱۱، ...، ۲۶ که هر جمله آن با اضافه کردن مقدار ثابتی (در این جا عدد ۳) به جمله ماقبلش حاصل می‌شود، را در نظر می‌گیریم. به چنین دنباله‌های تصاعد عددی گفته می‌شود، که به اختصار به صورت AP نشان می‌دهیم. در حالت کلی اگر جمله اول یک تصاعد a باشد و اختلاف هر جمله از جمله ماقبلش را d در نظر بگیریم، معمولاً d را قدر نسبت می‌نامند، در این صورت اولین n جمله تصاعد عبارت است از:

$$a, (a + d), (a + 2d), \dots, [a + (n - 1)d] \quad (5.8)$$

قدر نسبت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

The general term is now of the form $\pm \frac{1}{2^r}$ with a positive sign when r is odd and a negative sign when r is even. The general term can then be written

$$(-1)^{r+1} \frac{1}{2^r}$$

and the series

$$\sum_{r=1}^4 (-1)^{r+1} \frac{1}{2^r}.$$

حال جمله عمومی آن به شکل $\pm \frac{1}{2^r}$ می‌باشد. علامت آن مثبت است هرگاه r فرد باشد و منفی است هرگاه r زوج باشد. جمله عمومی می‌تواند به شکل $(-1)^{r+1} \frac{1}{2^r}$ نوشته شده و سری آن به صورت

$$\sum_{r=1}^4 (-1)^{r+1} \frac{1}{2^r}$$

Example 5 Write, in sigma notation, the series

$$1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13.$$

Note that the first numbers in the pairs are 1, 4, 7, 10. The difference is 3 in each case and therefore, since the difference is constant, this suggests a linear form such as $ar + b$.

$$\begin{aligned} r = 1, (ar + b = 1) &\Rightarrow (a + b = 1), \\ r = 2, (ar + b = 4) &\Rightarrow (2a + b = 4), \\ &\Rightarrow (a = 3, b = -2). \end{aligned}$$

Hence, we obtain 1, 4, 7, 10 by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$ in $(3r - 2)$.

مثال ۵: سری زیر را بانماد سیگما نمایش دهید:

$$1 \times 4 + 4 \times 7 + 7 \times 10 + 10 \times 13$$

دقت داریم که اولین عددهای، زوجهای فوق عبارتند از ۱ و ۴ و ۱۰. تفاضل هریک از جملات با جمله قبل ۳ است و بنابراین مادامی که تفاضل عددی ثابت است، یک شکل خطی به صورت $ar + b$ ایجاب می‌کند.

$$\begin{aligned} r = 1, (ar + b = 1) &\Rightarrow (a + b = 1) \\ r = 2, (ar + b = 4) &\Rightarrow (2a + b = 4) \\ &\Rightarrow (a = 3, b = -2) \end{aligned}$$

بنابراین اعداد ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ را با جایگزینی کردن $r = 1, 2, 3, 4$ در $(3r - 2)$ به دست می‌آوریم.

برابر است با ۱- با اقدام به روش دیگری، می نویسیم $u_n = 5 - n$ ، بنابراین $u_{n+1} = 5 - (n + 1)$ و واضح است که،
قدر نسبت $u_{n+1} - u_n$ یعنی،
 $u_{n+1} - u_n = [5 - (n + 1)] - (5 - n) = -1$

Example 8 The eighth term of an AP is five times the second term and the first term is 1. Find the common difference d and the eleventh term.

Since $a = 1$ the eighth term is $1 + 7d$ and the second term is $1 + d$. The given relation between these two terms

$$\Rightarrow [(1 + 7d) = 5(1 + d)]$$

$$\Rightarrow (2d = 4) \Rightarrow (d = 2).$$

The eleventh term is $1 + 10d = 21$.

مثال ۸: جمله هشتم یک تصاعد عددی پنج برابر جمله دوم آن است و جمله اول این تصاعد ۱ است. جمله یازدهم و قدرنسبت را بیابید.

چون $a = 1$ پس جمله هشتم $(1 + 7d)$ و جمله دوم $(1 + d)$ می باشد. حال رابطه بین این دو جمله را می نویسیم:
 $\Rightarrow [(1 + 7d) = 5(1 + d)] \Rightarrow (2d = 4) \Rightarrow d = 2$
جمله یازدهم عبارت است از $1 + 10d = 21$.

5.4 Arithmetic series

When the terms of an AP are added together, we obtain an *arithmetic series*. From the sequence (5.8) we obtain the series

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d]. \quad (5.9)$$

Using the sigma notation, we may write this as

$$\sum_{r=1}^n [a + (r - 1)d].$$

۵.۴ سری عددی

وقتی که جملات یک تصاعد عددی بایکدیگر جمع شوند، ما یک سری عددی خواهیم داشت. با توجه به دنباله (۵.۸) ما سری زیر را به دست می آوریم:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] \quad (۵.۹)$$

که با استفاده از نماد سیگما، می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\sum_{r=1}^n [a + (r - 1)d]$$

Example 6 The seventh term of an AP is 15 and the tenth term is 21. Find a , the first term of the progression, and d , the common difference. Find also the n th term.

Since the seventh term is 15, $a + 6d = 15$.

Since the tenth term is 21, $a + 9d = 21$.

Solving these equations for a and d , we obtain

$$a = 3, d = 2.$$

The n th term is

$$a + (n - 1)d = 3 + (n - 1)2 = 2n + 1.$$

مثال ۶: هفتمین جمله از یک تصاعد عددی ۱۵ می باشد و دهمین جمله آن ۲۱ است. اولین جمله و قدرنسبت و نیز n امین جمله این تصاعد را پیدا کنید.

از آنجایی که جمله هفتم، ۱۵ می باشد داریم، $a + 6d = 15$.

از آنجایی که جمله دهم، ۲۱ می باشد داریم، $a + 9d = 21$.

از حل این معادلات بر حسب a و d ، خواهیم داشت:

$$a = 3, d = 2$$

جمله n ام عبارت است از:

$$a + (n - 1)d = 3 + (n - 1)2 = 2n + 1$$

Example 7 The n th term of an AP is $5 - n$. Find a , the first term of the sequence, and d , the common difference.

The first term is obtained by setting $n = 1$

$$\Rightarrow a = 5 - 1 = 4.$$

The second term is $5 - 2 = 3$ and therefore the common difference d is -1 .

An alternative way of proceeding is to write $u_n = 5 - n$. Then

$$u_{n+1} = 5 - (n + 1).$$

Clearly,

$$u_{n+1} - u_n = \text{common difference } d$$

$$= [5 - (n + 1)] - (5 - n) = -1.$$

مثال ۷: جمله n ام از تصاعدی عددی عبارت است از $(5 - n)$.

جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

با جایگذاری $n = 1$ جمله اول حاصل می شود:

$$n = 1 \Rightarrow a = 5 - 1 = 4$$

دومین جمله $5 - 2 = 3$ می باشد و بنابراین قدرنسبت یعنی d