

آموزش ترجمه متون ریاضی (۳)

● حمید رضا امیری

Example 4

(a) $f: x \mapsto 3x + 1$.

Let $y = 3x + 1$, so that $x = (y - 1)/3$. Then $f: (y - 1)/3 \mapsto y$

$$\Rightarrow f^{-1}: y \mapsto (y - 1)/3 \text{ or } f^{-1}: x \mapsto (x - 1)/3,$$

with domain and range $\mathbb{R}$.

(b) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

$$\text{Let } y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f: \frac{1}{y} \mapsto y.$$

$$\text{Therefore, } f^{-1}: y \mapsto \frac{1}{y} \text{ or } f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Hence, f is its own inverse.

مثال ۴

$$f: x \mapsto 3x + 1 \text{ (الف)}$$

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{(y - 1)}{3} \text{ فرض کنیم}$$

$$\text{بنابراین } f: \frac{(y - 1)}{3} \mapsto y \text{ در نتیجه}$$

$$f^{-1}: x \mapsto \frac{(x - 1)}{3} \text{ یا } f^{-1}: y \mapsto \frac{(y - 1)}{3}$$

که دامنه و بُرد آن $\mathbb{R}$ می باشد.

$$f: x \mapsto \frac{1}{x} \text{ (ب)}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f: \frac{1}{y} \mapsto y \text{ فرض کنیم}$$

$$\text{بنابراین، } f^{-1}: y \mapsto \frac{1}{y} \text{ یا } f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{x}.$$

پس وارون f خودش می باشد.

Inverse functions

توابع معکوس

If for a given function f a function g can be found such that

$$gf: x \mapsto x$$

and also

$$fg: x \mapsto x,$$

then g is denoted by f^{-1} and is said to be the *inverse* of f .

هرگاه با در نظر گرفتن تابع f بتوان تابعی مانند g یافت به قسمی که $gf: x \mapsto x$ و همچنین $fg: x \mapsto x$ ، در این صورت g به صورت f^{-1} نمایش داده شده و به آن معکوس f می گوئیم.

In general, for a function f to have an inverse f^{-1} the following conditions must be satisfied:

- (i) the range of f = the codomain of f ,
- (ii) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$,
- (iii) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, for all x_1 and x_2 in the domain of f .

در حالت کلی، برای تابعی چون f یک معکوس مانند f^{-1} داریم هرگاه شروط زیر صادق باشند:

هم دامنه f = بُرد f (۱)

برای هر x_1 و x_2 در دامنه f $\left. \begin{array}{l} (۲) x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ (۳) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array} \right\}$

(۱) با توجه به این که f را یک تابع فرض کرده ایم شرط دوم همواره برقرار می باشد.

منحصراً یک نقطه روی ۴ نگاشته می‌شود، این تابع دارای معکوس نمی‌باشد.

در هر حال، اگر دامنه را به IR^+ ، مجموعه اعداد حقیقی مثبت، محدود کنیم، آنگاه ۴ به روی هم دامنه‌اش IR^+ نگاشته می‌شود و دارای معکوس است:

$$f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x}$$

(توجه کنید که ما برای نشان دادن ریشه دوم مثبت $\sqrt{x}$ از x استفاده می‌کنیم.)

(d) If $f: x \mapsto x + 1$ and

$$g: x \mapsto x^2$$

then

$$fg: x \mapsto x^2 + 1.$$

The inverse is obtained by solving $y^2 + 1 = x$, which gives $y = \pm\sqrt{x-1}$. For $(fg)^{-1}$ to be a function we must restrict the new domain to $x \geq 1$ and the range to, say, the positive square root of $(x-1)$. Then

$$(fg)^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x-1} \text{ for } x \geq 1.$$

Notice that

$$f^{-1}: x \mapsto x - 1,$$

$$g^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x}$$

and

$$g^{-1}f^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x-1} \text{ for } x \geq 1.$$

Hence, with above restrictions on domain and range

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$$

(ت) اگر $f: x \mapsto x + 1$ و $g: x \mapsto x^2$ در این صورت $fg: x \mapsto x^2 + 1$ با حل معادله $y^2 + 1 = x$ معکوس به دست می‌آید، که خواهیم داشت $y = \pm\sqrt{x-1}$. برای اینکه $(fg)^{-1}$ تابع باشد باید دامنه و برد جدیدی را به $x \geq 1$ محدود کنیم، می‌گوییم، ریشه دوم مثبت از $(x-1)$ بنابراین

$$(fg)^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x-1} \text{ for } x \geq 1$$

توجه دارید که:

$$f^{-1}: x \mapsto x - 1$$

$$g^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x}.$$

$$g^{-1}f^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x-1} \text{ for } x \geq 1$$

بنابراین، با محدودیت بالا روی دامنه و برد $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

The above examples suggest the following rule for obtaining the inverse. If $y = f(x)$ is the equation of the graph for any function f which has an inverse, then (i) interchange x and y so that $x = f(y)$, (ii) solve, if possible, for y in terms of x .

The result gives the inverse function f^{-1} if it exists.

مثالهای بالا دستور زیر را برای به دست آوردن معکوس یک تابع پیشنهاد می‌کنند.

اگر $y = f(x)$ معادله نمودار هر تابع مانند f بوده به قسمی که آن تابع دارای یک معکوس باشد، در این صورت (برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس آن به این شکل عمل می‌کنیم)

(۱) جای x و y را عوض می‌کنیم به قسمی که $x = f(y)$ را بر حسب y به دست می‌آوریم

(۲) در معادله y بر حسب x ($y = f(x)$) به جای x مقدار به دست آمده بر حسب y را قرار می‌دهیم: (با توجه به تعریف f^{-1} ضابطه آن را از روی معادله حاصل و با وارون کردن آن به دست می‌آوریم که البته می‌توان ضابطه f^{-1} را بر حسب x نیز بیان کرد.)^(۱)

نتیجه به دست آمده، معکوس تابع یعنی f^{-1} را در صورت وجود حاصل می‌کند.

(c) Consider the function $f: x \mapsto x^2$ with the domain $\mathbb{R}$. Clearly, both 2 and -2 map to 4. As it is not possible to say uniquely which point maps to 4, this function does not have an inverse.

However, if we restrict the domain to $\mathbb{R}^+$, the set of positive real numbers, then f maps onto the codomain $\mathbb{R}^+$ and f does have an inverse:

$$f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x}.$$

[Note we use $\sqrt{x}$ to denote the positive square root of x .]

(پ) تابع $f: x \mapsto x^2$ را با دامنه IR در نظر می‌گیریم. واضح است، دو عدد ۲ و -۲ روی عدد ۴ نگاشته می‌شوند ($f(2) = 4$ و $f(-2) = 4$). به هر صورت این امکان نیست که بیان کنیم (۱) دو مرحله (۱) و (۲) را می‌توان به این صورت خلاصه کرد و به کار برد: در معادله نمودار ابتدا جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس y را بر حسب x به دست می‌آوریم ضابطه به دست آمده همان $f^{-1}(x)$ است.

Indices

The three basic rules of indices are:

(i) To multiply powers of the same base add indices:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(ii) To divide powers of the same base subtract indices:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(iii) To raise a power of a base to a second index multiply the indices:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

These rules apply for $m, n \in \mathbb{Z}^+$. If we apply them to $m, n \in \mathbb{Q}$, we require the following interpretations:

نماها

سه دستور اساسی نماها عبارتند از:

(۱) برای ضرب توانها با پایه مشابه نماها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(۲) برای تقسیم توانها با پایه مشابه نماها را از هم کم می‌کنیم:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(۳) برای این که توان یک پایه را مجدداً به توان برسانیم نماها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

این دستورها برای $m, n \in \mathbb{Z}^+$ به کار می‌رود. اگر

ما اعداد $m, n \in \mathbb{Q}$ را به کار ببریم تعبیرهای زیر برای ما ایجاب می‌شود.

Note the order, which may at first seem strange. It does, however, agree with practical experience — 'drive the car into the garage and then close the door' but the inverse is 'first open the door and then drive the car out'.

بعلاوه توجه داریم که (مطلب فوق) در وهله اول ممکن است تا حدودی عجیب به نظر آید. به هر حال (دستورات و تعاریف فوق راجع به معکوس تابع) با این تجربه عملی مطابقت دارد - (عمل تابع به منزله) «راندن ماشین داخل گاراژ و سپس بستن درب گاراژ است؟» اما معکوس تابع «ابتدا درب را باز می‌کند و سپس ماشین را به بیرون می‌راند؟»

The general result is: for all functions $f, g, \dots, p, q$ such that the inverse function $(fg \dots pq)^{-1}$ exists

$$(fg \dots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \dots g^{-1}f^{-1}$$

This may be proved by induction (see page 46).

نتیجه کلی این که: برای هر تابع مانند f و g و $p \dots q$ که معکوس تابع $(fg \dots pq)^{-1}$ وجود داشته باشد

$$(fg \dots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \dots g^{-1}f^{-1}$$

اثبات رابطه بالا توسط استقراء امکان پذیر است (به صفحه ... مراجعه کنید).

1.2 Indices, surds and logarithms

۱.۲ نماها، اعداد گنگ (رادیکالی) و لگاریتمها

یقین را به بار می‌آورد که اگر به نتیجه‌ای برسد، این نتیجه را سراسر جهان دانش خواهد پذیرفت. این احساس که وی درباره اهمیت کار خود دارد، سرچشمه سعادت اوست و گذشتهایی را که بارها در زندگی به آنها رضا داده، جبران می‌کند.

تصویر جهان در فیزیک جدید. ماکس پلانک

مرتضی صابری

چون جهان حقیقت، به معنای مطلق کلمه، اگر نگوییم مستقل از هر فکر انسانی است، لااقل مستقل از شخصیت دانشمند است. هر کشفی که به وسیله فرد خاصی صورت پذیرد ارزش و معنایی عام پیدا می‌کند. این امر برای دانشمندی که در سکوت آزمایشگاه خود با مسأله‌ای دست به گریبان است، این