

آموزش ترجمه متون ریاضی (۹)

● حمید رضا امیری

Let e be the identity of a group G . Then trivially G and $\{e\}$ are subgroups of G . These subgroups are called *Improper subgroups* of G . A subgroup H of a group G , is called a *Proper subgroup* if it is different from G as well as from $\{e\}$.

If G is a group and H is a subgroup of G , for the sake of convenience we shall usually denote the induced binary composition of H by the same symbol which denotes the binary composition on G .

تعریف ۲.۱۴. زیرگروه

فرض کنیم G تحت ترکیب دوتایی $*$ یک گروه بوده و H زیر مجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این صورت H را یک زیرگروه G می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

- (۱) H نسبت به ترکیب دوتایی $*$ بسته باشد (خاصیت بسته بودن).
 - (۲) H تحت ترکیب دوتایی القاء شده توسط $*$ یک گروه باشد.
- فرض کنیم e عنصر همانی (عضو خشی) گروه G باشد. در این صورت بدیهی است که G و $\{e\}$ زیرگروههای G می‌باشند. این زیرگروهها زیرگروههای نامرئ G نامیده می‌شوند. زیرگروهی چون H از گروه G زیرگروه مرئ نامیده می‌شود، هرگاه با G و $\{e\}$ اختلاف داشته باشد ($H \neq e, H \neq G$).

اگر G یک گروه و H زیرگروه G باشد، برای راحتی، جهت نمایش ترکیب دوتایی H از نمادی شبیه به نمادی که برای نمایش ترکیب دوتایی روی G به کار می‌رود، استفاده می‌کنیم.

3. Subgroups

Let H be a non-void set and $*$ be a binary composition on H ; let A be a non-void subset of H . We recall that A is said to be *closed subset* of H with respect to the binary composition $*$, if for each pair $a, b \in A, a * b \in A$. In that case the mapping $f: A \times A \rightarrow A$ in which $f(a, b) = a * b$ is called a *binary composition on A induced by $*$* .

Let G be a group and let A be a non-void subset of G . It may happen that A is closed with respect to the binary composition on G and A itself is a group under the induced composition. Such a situation occurs quite often. This leads to the following concept.

۳. زیرگروهها

فرض کنیم H مجموعه‌ای ناتهی بوده و $*$ یک ترکیب دوتایی روی H ؛ و فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای ناتهی از H باشد. یادآوری می‌کنیم که مجموعه A یک زیر مجموعه بسته از مجموعه H ، نسبت به ترکیب دوتایی $*$ گفته می‌شود، اگر برای هر دو عضو a و $b \in A$ داشته باشیم، $a * b \in A$.

در آن حالت نگاشت $f: A \times A \rightarrow A$ که در آن $f(a, b) = a * b$ یک ترکیب دوتایی القاء شده توسط $*$ ، روی A نامیده می‌شود. فرض کنیم G یک گروه بوده و A یک زیر مجموعه ناتهی از G باشد. ممکن است این امر رخ دهد که A نسبت به ترکیب دوتایی تعریف شده روی G بسته بوده و خود A تحت القای این ترکیب یک گروه باشد. در چنین صورتی اغلب یک حالت مناسب رخ می‌دهد. این موضوع ما را به مفهوم زیر هدایت می‌کند.

Definition 2.14. Subgroup.

Let G be a group under a binary composition $*$ and let H be a non-void subset of G . Then H is called a *subgroup* of G if it satisfies the following:

- (1) H is closed with respect to $*$. (Closure Property).
- (2) H is a group under the binary composition of H induced by $*$.

Examples of Subgroups

EXAMPLE 16. The set E of all even integers is a subgroup of additive group Z .

EXAMPLE 17. The set Z is a subgroup of the additive group Q .

EXAMPLE 18. Let $G = \{1, -1, i, -i\}$, $H = \{1, -1\}$ where $i^2 = -1$.

Then G is a group under usual multiplication of complex numbers and H is a subgroup of G .

Lemma 2.15. If G is a group and H is a subgroup of G , then

(1) e , the identity of G , is also the identity of H .

(2) for each $a \in H$, $a^{-1} \in H$. ■

We now prove a theorem which supplies us a criterion to check whether a given subset of a group is a subgroup or not.

مثال ۱۶. مجموعه E شامل همه اعداد صحیح زوج یک زیرگروه از گروه جمعی Z است.
مثال ۱۷. مجموعه Z یک زیرگروه از گروه جمعی Q است.
مثال ۱۸. فرض کنیم $G = \{1, -1, i, -i\}$ و $H = \{1, -1\}$ که $i^2 = -1$.
در این صورت G تحت ضرب معمولی اعداد مختلط یک گروه بوده و H زیرگروهی از G می باشد.

پس ۲.۱۵ اگر G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد، در این صورت (۱) e ، عضو همانی G ، عضو همانی H نیز می باشد، (۲) برای هر $a \in H$ ، $a^{-1} \in H$. ■
حال قضیه ای ثابت می کنیم که توسط آن محکی به دست می آوریم برای چک کردن این که زیرمجموعه ای از یک گروه زیر گروه آن می باشد یا خیر.

Theorem 2.16. A non-void subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

Proof: Let H be a subgroup of G and let $a, b \in H$. By lemma 2.15, (2), $b^{-1} \in H$. Consequently by the closure property of H , $ab^{-1} \in H$.

Conversely let H be a non-void subset of G such that for all $a, b \in H$; $ab^{-1} \in H$.

(I) Since H is non-void, there exists $a \in H$.

Thus $aa^{-1} \in H$ i.e., $e \in H$. So H contains identity.

(II) Let $b \in H$. As $e \in H$, eb^{-1} i.e., $b^{-1} \in H$.

Hence $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$.

(III) $a, b \in H \Rightarrow a$ and $b^{-1} \in H$ by (II)

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$$

i.e. $ab \in H$, since $(b^{-1})^{-1} = b$.

Consequently H is a closed subset of G .

Trivially the induced binary composition on H is associative because the binary composition on G is associative. Hence H is a subgroup of G . ■

قضیه ۲.۱۶. زیرمجموعه ای ناتهی از یک گروه مانند G زیرگروهی از G است اگر و فقط اگر $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.
اثبات: فرض کنیم H زیرگروه G بوده و $a, b \in H$. با توجه به لم ۲.۱۵، داریم، $b^{-1} \in H$. بلافاصله با توجه به خاصیت بسته بودن H نتیجه می شود، $ab^{-1} \in H$.
برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعه ناتهی از G بوده به طوری که برای هر $a, b \in H$ $ab^{-1} \in H$.

(I) چون H ناتهی است، عضوی چون $a \in H$ موجود است. بنابراین $aa^{-1} \in H$ ، یعنی، $e \in H$. بنابراین H شامل عضو همانی می باشد.

(II) فرض کنیم $b \in H$. از آنجایی که $e \in H$ ، $eb^{-1} \in H$ ، یعنی، $b^{-1} \in H$.

مثالهایی از زیرگروهها

مثال ۱۶. مجموعه E شامل همه اعداد صحیح زوج یک زیرگروه از گروه جمعی Z است.

مثال ۱۷. مجموعه Z یک زیرگروه از گروه جمعی Q است.

مثال ۱۸. فرض کنیم $G = \{1, -1, i, -i\}$ و $H = \{1, -1\}$ که $i^2 = -1$.

در این صورت G تحت ضرب معمولی اعداد مختلط یک گروه بوده و H زیرگروهی از G می باشد.

EXAMPLE 19. Let G be the multiplicative group of all non-singular 2×2 matrices over complex numbers. Let H be the set of the following eight matrices

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Clearly $H \subseteq G$. As was claimed in Example 8, H is a group under matrix multiplication. Hence H is a subgroup of G .

مثال ۱۹. فرض کنیم G گروه ضربی شامل همه ماتریسهای نامفرد 2×2 روی اعداد مختلط باشد. فرض کنیم H مجموعه شامل هشت ماتریس زیر:

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

واضح است که $H \subseteq G$. برطبق آنچه در مثال ۸ ثابت شد، H

تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. بنابراین H یک زیرگروه G است.

EXAMPLE 20. The set Q^+ of all positive rational numbers is a subgroup of the multiplicative group Q^* of all non-zero rational numbers.

From the fact that a group has only one idempotent [Prob. 1 § 2], and the inverse of any element of G is unique, the following is immediate.

مثال ۲۰. مجموعه Q^+ شامل همه اعداد گویای مثبت یک زیرگروه ضربی گروه Q^* است (Q^* شامل همه اعداد گویای ناصفر است).

با توجه به این واقعیت که یک گروه فقط دارای یک عنصر همانی بوده و وارون هر عضو از G منحصر به فرد است، بلافاصله می توان لم زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۲.۱۷. فرض کنیم G یک گروه بوده و H یک زیرمجموعه ناتهی متاهی از G باشد. در این صورت H یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر برای هر $a, b \in H$ $ab \in H$.

البات: اگر H یک زیرگروه G باشد در این صورت طبق تعریف $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعه ناتهی متاهی از G بوده به قسمی که $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

در این صورت H یک نیم گروه متاهی می باشد. به علاوه چون قانون حذف در G برقرار است لذا در H نیز برقرار می باشد. بنابراین H یک زیرگروه است (با توجه به قضیه ۲.۶). ■



بنابراین $b^{-1} \in H \Leftrightarrow b \in H$

(III) $a, b^{-1} \in H \Leftrightarrow a, b \in H$ (با توجه به (II))

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$$

یعنی $(b^{-1})^{-1} = b$ زیرا $a, b \in H$

بنابراین H زیرمجموعه ای بسته از G می باشد.

بدیهی است ترکیب دوتایی القاء شده روی H شرکت پذیر است زیرا ترکیب دوتایی روی G شرکت پذیر است. پس H یک زیرگروه G است. ■

Theorem 2.17. Let G be a group and H be a finite non-void subset of G . Then H is a subgroup of G if and only if $ab \in H$ for all $a, b \in H$.

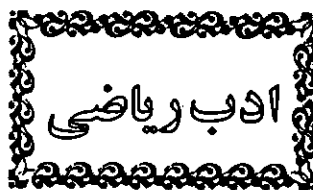
Proof: If H is a subgroup of G then by definition

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Conversely let H be a finite non-void subset of G such that

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Thus H is finite semi-group. Further the cancellation laws hold in H since the same hold in G . Hence H is a subgroup (Theorem 2.6). ■



حضور جای می گیرد و چنان می شود که به قول راسل و وایتهد، در نهایت با ریاضیات یکی می شود و در واقع ریاضیات به صورت شاخه ای از منطق روی می نماید.

از مقاله سامان ریاضی:

از مجله مجموعه مقالات و مسائل ریاضی

همسازی درونی به این معنی که بر هر چه می خواهی بنا کن اما در این صورت باید آداب و ترتیب دان باشی و دیگر نمی توانی به خواست دلت عمل کنی و هر چه دل تنگت می خواهد بگویی. کار حساب و کتاب دارد و قدر و اندازه، و به این ترتیب به منطق می رسم و منطق پا به میان می گذارد و سکه به نام کیمیای سخن زده می شود.

پس ریاضیات هم علم است و هم هنر. علم بدین معنی که کشف می کند و هنر بدان مفهوم که می آفریند. نیز علم به این معنی که آداب و تربیت دارد و هنر به آن مفهوم که زیباست، و در این صورت هم زبان می خواهد و هم منطقی در آن زبان، و نیاز به منطقی که این دورا توأمان داشته باشد و به یک کرشمه دو کار کند، پیدا می کند. و به این ترتیب منطق نمادین یا ریاضی پا به عرصه ظهور می گذارد و در زمره