

آموزش ترجمه متون ریاضی (۸)

● حمید رضا امیری

6 Inequalities*

6.1 Linear Inequalities

The inequality 'x is greater than y', written $x > y$, is defined to mean $x - y$ is positive. In a similar way, 'x is less than y', written $x < y$, means $x - y$ is negative.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0).$$

$$(x < y) \Leftrightarrow (x - y < 0).$$

If x is greater than or equal to y , then we write $x \geq y$ with a similar notation, $x \leq y$, for x less than or equal to y .

The basic rules for manipulating inequalities are:

(1) The same number may be added to both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a).$$

(2) The same number may be subtracted from both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b).$$

(3) If both sides of an inequality are multiplied by a *positive* number, the inequality is *preserved*.

$$(x > y \text{ and } a > 0) \Rightarrow (ax > ay).$$

(4) If both sides of an inequality are multiplied by a *negative* number the inequality is *reversed*.

$$(x > y \text{ and } b < 0) \Rightarrow (bx < by).$$

(5) The corresponding sides of inequalities of the same kind may be added (but not subtracted).

$$(a > b \text{ and } x > y) \Rightarrow (a + x > b + y).$$

(6) Inequalities of the same type are transitive.

$$(x > y \text{ and } y > z) \Rightarrow (x > z).$$

*Throughout this chapter all variables are real (i.e. $\in \mathbb{R}$).

y است. به صورت $x < y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$

مقداری منفی می باشد. $(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$

$(x < y) \Leftrightarrow (x - y < 0)$

اگر x بزرگتر یا مساوی y باشد در این صورت می نویسیم $x \geq y$ و

به طریق مشابه نماد $x \leq y$ برای x کوچکتر یا مساوی y به

کار می رود.

قاعده های اساسی برای تغییر و دستکاری نابرابریها به قرار زیراند:

(۱) می توان به دو طرف یک نابرابری یک عدد یکسان

(مساوی) اضافه نمود، به صورت زیر:

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a)$$

(۲) از دو طرف یک نابرابری می توان یک عدد یکسان کم کرد،

به صورت زیر، $(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b)$

(۳) اگر دو طرف یک نابرابری را در یک عدد مثبت ضرب

کنیم، نابرابری حفظ می شود (جهت آن تغییر نمی کند).

$$(x > y, a > 0) \Rightarrow (ax > ay)$$

(۴) اگر دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود،

نابرابری حفظ نمی شود (جهت آن عوض می شود).

$$(x > y, a < 0) \Rightarrow ax < ay$$

(۵) طرفین متناظر در نامساویهای هم جهت را می توان با هم جمع

کرد (در مورد تفریق حکم کلی نیست).

$$(a > b, x > y) \Rightarrow (a + x > b + y)$$

(۶) در نامساویها خاصیت تعدی یا تراگذری برقرار است.

$$(x > y, y > z) \Rightarrow (x > z)$$

۶ نابرابریها*

۶.۱ نابرابریهای خطی

نابرابری « x بزرگتر از y است» با نماد $x > y$ نوشته شده و به معنی

این است که $x - y$ مقداری مثبت است. به طریق مشابه « x کوچکتر از

* در این بخش تمامی مقادیر حقیقی هستند (یعنی متعلق به $\mathbb{R}$).

Example 4 Given that $a > b$, what can be said about the relation between a^2 and b^2 ?

We need to consider three separate cases depending on the signs of a and b .

(a) a, b both positive.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab), \text{ multiplying by } a,$$

$$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2), \text{ multiplying by } b.$$

Combining these, we have

$$(a^2 > ab \text{ and } ab > b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2).$$

(b) a, b both negative.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab), \text{ multiplying by } a, \text{ which is negative,}$$

$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2), \text{ multiplying by } b, \text{ which is negative.}$$

Combining these, we have

$$(a^2 < ab < b^2) \Rightarrow (a^2 < b^2).$$

(c) Nothing can be said in the case when a is positive and b is negative. For example,

$$4 > -2 \text{ and } 4^2 > (-2)^2$$

but

$$4 > -6 \text{ and } 4^2 < (-6)^2.$$

مثال ۴. اگر فرض کنیم $a > b$ ، راجع به رابطه بین a^2 و b^2 چه می‌توان گفت؟

ما نیاز داریم که سه حالت مجزا از یکدیگر و برحسب علامتهای a و b در نظر بگیریم.

(الف) a و b هر دو مثبت باشند.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab) \quad \text{با ضرب دو طرف در } a$$

$$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2) \quad \text{با ضرب دو طرف در } b$$

با ترکیب دو رابطه اخیر داریم:

$$(a^2 > ab \text{ و } ab > b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2)$$

(ب) a و b هر دو منفی باشند.

با ضرب دو طرف در a که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab)$$

با ضرب دو طرف در b که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2)$$

از ترکیب این روابط خواهیم داشت:

$$(a^2 < ab < b^2) \Rightarrow (a^2 < b^2)$$

(ج) در حالتی که a مثبت و b منفی باشد چیزی نمی‌توانیم

بگوییم. به عنوان مثال:

$$4 > -2 \text{ و } 4^2 > (-2)^2$$

$$4 > -6 \text{ و } 4^2 < (-6)^2$$

Example 1 Given that $x > y$, show that $x + a > y + a$.

By definition $(x > y) \Leftrightarrow (x - y \text{ is positive})$.

We may write $x - y = (x + a) - (y + a)$.

$$[(x + a) - (y + a)] \text{ is positive} \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Hence,

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a).$$

مثال ۱. فرض کنیم که $x > y$ ، نشان دهید $x + a > y + a$.

با توجه به اینکه $(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x - y = (x + a) - (y + a)$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \Leftrightarrow x + a > y + a$$

بنابراین،

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Example 2 Given that $x > y$ and $b < 0$, show that $bx < by$.

As above, $(x > y) \Leftrightarrow (x - y \text{ is positive})$.

Since $b < 0$, $b(x - y)$ is negative. But $b(x - y) = bx - by$. Hence,

$$(bx - by \text{ is negative}) \Leftrightarrow (bx < by).$$

مثال ۲. فرض کنید $x > y$ و $b < 0$ ، نشان دهید $bx < by$.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0) \quad \text{می‌دانیم}$$

از آن‌جا که $b < 0$ پس، $b(x - y)$ مقداری است منفی. اما داریم:

$$b(x - y) = bx - by < 0 \Leftrightarrow bx < by$$

Example 3 Given that $x > y$ and $a > b$, show that $a + x > b + y$.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y \text{ is positive}).$$

$$(a > b) \Leftrightarrow (a - b \text{ is positive}).$$

Hence,

$$[(x - y) + (a - b) \text{ is positive}]$$

$$\Rightarrow [(x + a) - (y + b) \text{ is positive}].$$

$$\Rightarrow (x + a > y + b).$$

مثال ۳. فرض کنید $x > y$ و $a > b$ ، نشان دهید $a + x > b + y$.

$$(x > y) \Rightarrow (x - y > 0)$$

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$$

بنابراین،

$$(x - y) + (a - b) > 0$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + b) > 0 \Rightarrow (x + a) > (y + b)$$

وقتی دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود جهت نابرابر معکوس می‌شود.)

$$3 + 4x > 3x \Rightarrow x > -3$$

بنابراین، مجموعه جواب عبارت است از $\{x : -3 < x < 0\}$.

6.2 Quadratic Inequalities

An inequality of the form $ax^2 + bx + c \geq 0$, where $a \neq 0$, is called a quadratic inequality. The solution depends on the sign of the discriminant ($b^2 - 4ac$).

(i) If $b^2 \leq 4ac$, then:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a > 0,$$

and

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a < 0.$$

These results follow from the work of chapter 3.

۶.۲ نابرابریهای درجه دوم

هر نابرابری به شکل $ax^2 + bx + c \geq 0$ که در آن، $a \neq 0$ ، یک نابرابری درجه دوم نامیده می‌شود. حل چنین نابرابریهایی بستگی به علامت مین آن یعنی $(b^2 - 4ac)$ دارد.

(۱) اگر $b^2 < 4ac$ در این صورت:

برای هر مقدار x در حالتی که $a > 0$ ، همواره داریم:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

و برای هر مقدار x در حالتی که $a < 0$ ، همواره داریم:

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

نتایج فوق با توجه به کاری که در بخش ۳ انجام شد، به دست آمده است.

Example 5 Find the set of values of x for which $2x + 2 > 6$.

$(2x + 2 > 6) \Rightarrow (2x > 6 - 2 = 4)$, subtracting 2 from each side,
 $\Rightarrow x > 2$, multiplying each side by $\frac{1}{2}$.

The required set is

$$\{x : x > 2\}.$$

مثال ۵. مجموعه مقادیری را برای x بیابید که به ازای آنها نابرابری

$2x + 2 > 6$ برقرار باشد (مجموعه جواب نابرابری را مشخص کنید):

$$\begin{array}{l} \text{ضرب دو طرف در } \frac{1}{2} \quad \text{تفریق ۲ از طرفین} \\ (2x + 2 > 6) \Rightarrow (2x > 6 - 2 = 4), \Rightarrow x > 2 \end{array}$$

بنابراین مجموعه جواب عبارت است از $\{x : x > 2\}$.

Example 6 Find the set of values of x for which

$$\frac{3 + 4x}{x} < 3.$$

(a) When $x > 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x < 3x)$$

$$\Rightarrow (4x - 3x < -3) \Rightarrow (x < -3).$$

As this contradicts the condition $x > 0$, the required set cannot contain positive values.

(b) When $x < 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x > 3x).$$

since multiplying by a negative number reverses the inequality.

$$(3 + 4x > 3x) \Rightarrow (x > -3).$$

Hence, the required set is

$$\{x : -3 < x < 0\}.$$

مثال ۶. مجموعه جواب نامعادله $\frac{3+4x}{x} < 3$ را بیابید.

(الف) وقتی که $x > 0$ ،

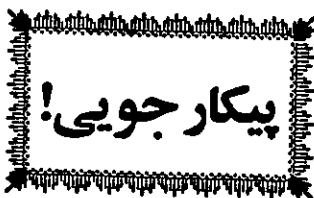
$$\left(\frac{3+4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x < 3x)$$

$$\Rightarrow (4x - 3x < -3) \Rightarrow x < -3$$

که در این حالت با شرط $x > 0$ تناقض ایجاد می‌شود و مجموعه جواب نمی‌تواند شامل مقادیر مثبت باشد.

(ب) وقتی که $x < 0$ ،

$$\left(\frac{3+4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x > 3x)$$



۲۵ خودریخت است دو رقم آخر مربع آن (۶۲۵) رقمهای ۲ و ۵ اند. عددهای خود ریخت دیگری را به دست آورید.
 عددهای ابر - خودریخت به صورت رقمهای نهایی مکعبهاشان ظاهر می‌شوند. عددهای ابر - خود ریخت را کشف کنید.