

آموزش ترجمه متون ریاضی (۷)

حمیدرضا امیری

This result enables us to find the remainder without carrying out the division. It is known as the *remainder theorem*.

A slightly more general result is obtained by considering division by $(ax + b)$. Then

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (ax + b)Q_1(x) + R_1, & (2.5) \\ \Rightarrow P_1(-b/a) &= R_1. & (2.6) \end{aligned}$$

(The value $(-b/a)$ is obtained by setting $ax + b = 0$.)

The remainder theorem

When the polynomial $P(x)$ is divided by the polynomial $\varphi(x)$, it is clear that the remainder $R(x)$ must have degree less than that of $\varphi(x)$. (If this is not so, the division is not complete.)

In particular, if $P(x)$ is of degree n and we divide it by $(x - \alpha)$, then the quotient $Q(x)$ will be a polynomial of degree $(n - 1)$ and the remainder $R(x)$ will be a constant. Thus,

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R. \quad (2.3)$$

قضیه باقیمانده

هرگاه چند جمله‌ای $P(x)$ را بر چند جمله‌ای $\varphi(x)$ تقسیم کنیم، واضح است که $R(x)$ باقیمانده تقسیم می‌بایست دارای درجه‌ای کمتر از درجه $\varphi(x)$ باشد. (در صورتی که چنین نباشد تقسیم تمام نمی‌شود.)

بویژه، اگر $P(x)$ از درجه n و بر $(x - \alpha)$ تقسیم شود، در این صورت $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم از درجه $(n - 1)$ بوده و $R(x)$ باقیمانده تقسیم عددی ثابت خواهد بود. بنابراین:

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R \quad (2.3)$$

If we substitute $x = \alpha$, then we see that

$$P(\alpha) = R. \quad (2.4)$$

این نتیجه به ما این امکان را می‌دهد که باقیمانده تقسیم را بدون انجام عمل تقسیم بیابیم و این همان قضیه تقسیم است. در صورتی که (به جای تقسیم $P(x)$ بر $(x - \alpha)$) این تقسیم را بر $(ax + b)$ در نظر بگیریم نتیجه‌ای تا حدودی کلی‌تر به دست می‌آید. بنابراین (خواهیم داشت):

$$P_1(x) = (ax + b)Q_1(x) + R_1 \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow P_1\left(-\frac{b}{a}\right) = R_1 \quad (2.6)$$

(مقدار $-\frac{b}{a}$ از حل معادله $ax + b = 0$ حاصل شده است.)

Example 7 Find the remainder when $P(x)$, where $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 12x - 8$, is divided by (a) $(x - 1)$, (b) $(2x - 1)$.

(a) The remainder is $P(1) = 6 - 7 + 12 - 8 = 3$.

(b) The remainder is $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$.

مثال ۷:

باقیمانده تقسیم $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 12x - 8$ را بر (الف) $(x - 1)$ ، (ب) $(2x - 1)$ پیدا کنید:

$P(1) =$ باقیمانده عبارت است از (الف)

اگر (در رابطه بالا) قرار دهیم $x = \alpha$ ، در این صورت خواهیم دید که:

$$P(\alpha) = R \quad (2.4)$$

Example 9 Show that $(3x + 1)$ is a factor of $P(x)$, where $P(x) = 6x^3 - x^2 - 19x - 6$.

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

We consider, therefore, $P(-\frac{1}{3})$:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(-\frac{1}{3}\right) - 6 \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{19}{3} - 6 = 0. \end{aligned}$$

Therefore, $(3x + 1)$ is a factor.

مثال ۹:

در صورتی که $P(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 19x - 6$ ، نشان دهید که

$(3x + 1)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

بنابراین؛ ما $P(-\frac{1}{3})$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(-\frac{1}{3}\right) - 6 \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{19}{3} - 6 = 0. \end{aligned}$$

پس؛ $(3x + 1)$ یک عامل $P(x)$ است.

Example 10 For what value of k is $(x + 3)$ a factor of $P(x)$, where

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + k.$$

If $(x + 3)$ is a factor, $P(-3) = 0$.

$$\begin{aligned} P(-3) = 0 &\Rightarrow 81 - 27 + k = 0 \\ &\Rightarrow k = -54. \end{aligned}$$

مثال ۱۰:

هرگاه داشته باشیم؛ $P(x) \equiv x^4 - 3x^2 + k$ ، معین کنید به ازای

چه مقداری برای k ، $(x + 3)$ یک عامل $P(x)$ است.

اگر $(x + 3)$ یک عامل $P(x)$ باشد، $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 81 - 27 + k = 0 \Rightarrow k = -54$$

Example 11 Given that $(x + 1)$ and $(x - 2)$ are factors of $P(x)$, where

$$P(x) = ax^3 - bx^2 + ax + 6,$$

find the constants a and b .

Since $(x + 1)$ is a factor, $P(-1) = 0$,

$$6 - 7 + 12 - 8 = 3$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$$

$$6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$$

The factor theorem

From Equation (2.6) we see that, if $P_1(-b/a) = 0$, then $R_1 = 0$

$\Rightarrow$ there is no remainder when $P_1(x)$ is divided by $ax + b$

$\Rightarrow ax + b$ is a factor of $P_1(x)$.

This is known as the *factor theorem*.

From Equation (2.4) we see the result: 'If $P(a) = 0$, then $(x - a)$ is a factor of $P(x)$.'

قضیه فاکتور (تجزیه)

با توجه به معادله (۲.۶) مشاهده می‌شود که اگر

$$R_1 = 0 \text{، در این صورت } P_1 = \left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

$\Leftrightarrow$ وقتی که $P_1(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر باشد باقیمانده‌ای وجود ندارد.

$\Leftrightarrow (ax + b)$ یک فاکتور یا عامل $P_1(x)$ می‌باشد.

این مطالب به قضیه فاکتور (تجزیه) معروف است.

با توجه به معادله (۲.۴) این نتیجه را مشاهده می‌کنیم که:

اگر $P(a) = 0$ ، در این صورت: $(x - a)$ یک عامل یا

فاکتور چندجمله‌ای $P(x)$ است.

Example 8 Show that $(x - 3)$ is a factor of $P(x)$, where

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27.$$

$$P(3) = 2.27 - 6.9 + 9.3 - 27 = 0.$$

Therefore, $(x - 3)$ is a factor.

مثال ۸:

در صورتی که $P(x) \equiv 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27$ ، نشان دهید که

$(x - 3)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$P(3) = 2 \times 27 - 6 \times 9 + 9 \times 3 - 27 = 0.$$

بنابراین؛ $(x - 3)$ یک عامل $P(x)$ است.

Example 12 Find the factors of $P(x)$, where $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

The only integer factors of 6 are $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ and so these are the values of λ we consider.

Trial factor $(x - \lambda)$	$P(\lambda)$	Comment
(i) $(x - 1)$	$1 - 4 + 1 + 6 = 4$	Not zero, not a factor
(ii) $(x + 1)$	$-1 - 4 - 1 + 6 = 0$	$(x + 1)$ is a factor
(iii) $(x - 2)$	$8 - 16 + 2 + 6 = 0$	$(x - 2)$ is a factor
(iv) $(x + 2)$	$-8 - 16 - 2 + 6 = -10$	Not zero, not a factor
(v) $(x - 3)$	$27 - 36 + 3 + 6 = 0$	$(x - 3)$ is a factor
(vi) $(x + 3)$	$-27 - 36 - 3 + 6 = -60$	Not zero, not a factor

The factors are $(x + 1)$, $(x - 2)$ and $(x - 3)$ and the factorisation of $P(x)$ is

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

At stage (ii), having found that $(x + 1)$ is a factor, we could, of course, divide $P(x)$ by $(x + 1)$ and deal with the remaining quadratic $x^2 - 5x + 6$, which immediately factorises into $(x - 2)(x - 3)$.

Also, at stage (iii) we have a factor $(x + 1)(x - 2)$ and the remaining factor can be obtained by dividing out or by inspection.

Stage (vi) is, of course, not necessary, as we have already found three factors of the cubic polynomial. For the same reason we need not consider $\lambda = \pm 6$.

مثال ۱۲:

هرگاه $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6$ ، در این صورت عاملهای $P(x)$ را پیدا کنید.

تنها عاملهای صحیح عدد ۶ عبارتند از: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ و بنابراین ما می‌بایست این مقادیر را برای λ در نظر بگیریم.

امتحان عامل $(x - \lambda)$	$P(\lambda)$	نتیجه
(۱) $(x - 1)$	$1 - 4 + 1 + 6 = 4$	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.
(۲) $(x + 1)$	$-1 - 4 - 1 + 6 = 0$	$(x + 1)$ یک عامل است.
(۳) $(x - 2)$	$8 - 16 + 2 + 6 = 0$	$(x - 2)$ یک عامل است.
(۴) $(x + 2)$	$-8 - 16 - 2 + 6 = -10$	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.
(۵) $(x - 3)$	$27 - 36 + 3 + 6 = 0$	$(x - 3)$ یک عامل است.
(۶) $(x + 3)$	$-27 - 36 - 3 + 6 = -60$	مخالف صفر، عامل نمی‌باشد.

عاملهای $P(x)$ عبارتند از: $(x + 1)$ ، $(x - 2)$ و $(x - 3)$

و تجزیه $P(x)$ به صورت $P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x - 3)$ می‌باشد.

در مرحله (۲)، $(x + 1)$ به عنوان یک عامل $P(x)$ یافت

می‌شود، پس قطعاً، می‌توانیم $P(x)$ را بر $(x + 1)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت، عبارت درجه دوم $x^2 - 5x + 6$ خواهد بود، که

$$\Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \Rightarrow -2a - b + 6 = 0.$$

Since $(x - 2)$ is a factor, $P(2) = 0$,

$$\Rightarrow 8a - 4b + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 10a - 4b + 6 = 0.$$

Solving these simultaneous equations, we obtain $a = 1$ and $b = 4$.

مثال ۱۱:

هرگاه $P(x) \equiv ax^2 - bx^2 + ax + 6$ ، با فرض این که $(x + 1)$ و

$(x - 2)$ عاملهای $P(x)$ می‌باشند $P(x)$ بر $(x + 1)$ و $(x - 2)$

بخش پذیر است، عددهای ثابت a و b را پیدا کنید.

چون: $(x + 1)$ عامل $P(x)$ است، $P(-1) = 0$.

$$\Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \Rightarrow -2a - b + 6 = 0 \quad (۱)$$

چون: $(x - 2)$ عامل $P(x)$ است، $P(2) = 0$.

$$\Rightarrow 4a - 4b + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 6a - 4b + 6 = 0 \quad (۲)$$

(با توجه به معادلات (۱) و (۲) دستگاه معادلاتی تشکیل

می‌شود که از حل این دستگاه معادلات $a = 1$ و $b = 4$ ، به دست می‌آید.

Finding factors of polynomials

The factor theorem provides an important aid to finding factors of polynomials. To find linear factors, we seek values of λ such that $(x - \lambda)$ divides $P(x)$. As a consequence of the factor theorem, this is equivalent to finding values of λ for which $P(\lambda) = 0$.

If the polynomial is written in such a way that the coefficients are all integers, then it is suggested that one considers those values of λ which are a factor of the constant term a_0 in the polynomial.

تشخیص عاملهای چندجمله‌ایها

قضیه عامل (تجزیه) جهت تشخیص عاملهای

چندجمله‌ایها کمک مهمی است. برای پیدا کردن عاملهای

خطی، ما در جستجوی مقادیری برای λ هستیم به طوری که

$P(x)$ بر $(x - \lambda)$ بخش پذیر باشد. یکی از نتایج حاصل از قضیه

عامل، معادل با تشخیص مقادیر λ است به طوری که $P(\lambda) = 0$.

اگر یک چندجمله‌ای به شکلی نوشته شود که همه ضرایب

آن عددهای صحیح باشند، در این صورت پیشنهاد می‌شود

مقادیری را برای λ در نظر بگیریم که عدد ثابت چندجمله‌ای

یعنی a_0 بر آنها بخش پذیر باشد.

polynomial $P(x)$ in terms of its factors. We will illustrate this by using the polynomial $P(x)$ considered in Example 12 above. We found that

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

استفاده از عاملها

شرایط متعددی وجود دارد که توانایی نوشتن یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ را بر حسب عاملهایش، سودمند می‌سازد. این مطلب را با استفاده از چندجمله‌ای $P(x)$ که در مثال ۱۲ در نظر گرفته شده است، توضیح می‌دهیم. ما یافتیم که:

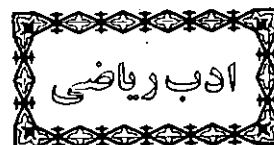
$$P(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

بلافاصله به $(x - 3)(x - 2)$ تجزیه می‌شود.

همچنین در مرحله (۳) ما یک عامل $(x + 1)(x - 2)$ را داشته و عامل باقیمانده می‌تواند از طریق تقسیم خارج شود یا با یک بررسی دقیق این کار صورت گیرد. البته، با توجه به این که ما سه عامل برای چندجمله‌ای درجه سوم $P(x)$ یافته‌ایم مرحله (۵) لزومی ندارد. به عنوان مثال: ما، نیازی برای در نظر گرفتن $\pm 6 = \pm 1$ نداریم.

The use of factors

There are several circumstances where it is advantageous to be able to write a



این فکر بسیار کودکانه است که انسان چنان تصور کند علم با یونان آغاز کرده است؛ بر «معجزه» یونان هزاران سال کار مصر و بین‌النهرین و احتمالاً سرزمینهای دیگر مقدم بوده است، و علم یونان بیشتر جنبه تجدید حیات داشته است تا جنبه اختراع.

تاریخ علم. جورج سارتن. احمد آرام

